



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 58 за 2019 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Меретин А.С., [Савенков Е.Б.](#)

Математическая модель
фильтрационных процессов
в термopорoупругой среде с
учетом континуального
разрушения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Меретин А.С., Савенков Е.Б. Математическая модель фильтрационных процессов в термopорoупругой среде с учетом континуального разрушения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 58. 38 с. doi:[10.20948/prepr-2019-58](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-58)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-58>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

А.С. Меретин, Е.Б. Савенков

**Математическая модель фильтрационных процессов
в термopopoупругой среде с учетом континуального разрушения**

Москва, 2019

A.S. Meretin, E.B. Savenkov, Математическая модель фильтрационных процессов в термопороупругой среде с учетом континуального разрушения

Аннотация

В настоящей работе приведена физико-математическая модель для описания эволюции состояния термопороупругой среды с учетом процессов разрушения. Рассматривается двухфазная среда, состоящая из пористого скелета и подвижного флюида. Эволюция состояния среды описывается системой законов сохранения массы, импульса и энергии. Определяющие соотношения получены с использованием процедуры Колмана-Нолла, обеспечивающей выполнение принципа термодинамической согласованности. Разрушение среды описывается в рамках теории континуального разрушения, предложенной Л.М. Качановым и Ю.Н. Работновым.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект No 16-29-15078 офи_м.

Ключевые слова: термопороупругость, разрушение, процедура Колмана-Нолла, термодинамическая согласованность

A.S. Meretin, E.B. Savenkov, Mathematical model for coupled flow and damage in thermoporoelastic medium

Abstract In this paper we propose a mathematical model for thermoporoelastic medium with damage. The model considers a two-phase medium consisting of a porous skeleton and a mobile fluid. The evolution of the medium state is described by the system of mass, momentum and energy conservation laws. Constitutive relations are obtained by using the Coleman-Noll procedure, which ensures the fulfillment of the thermodynamic consistency. Damage of the medium is modeled within the framework of the continuum damage theory proposed by Kachanov and Rabotnov.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No 16-29-15078 офи_м.

Key words and phrases: thermoporoelasticity, damage, Coleman-Noll procedure, thermodynamic consistency principle

Содержание

1	Введение	3
2	Основные законы сохранения	4
3	Определяющие соотношения	8
4	Вывод диссипативного неравенства	9
5	Процедура Колмана-Нолла	11
6	Система уравнений модели	18
7	Моделирование разрушения среды	20
8	Заключение	35

1 Введение

В настоящее время в связи с вводом в эксплуатацию все большего числа месторождений с трудноизвлекаемой нефтью появилась необходимость в создании новых способов разработки и методов увеличения нефтеотдачи. Одним из таких методов является термическое воздействие на пласт, которое обладает значительными перспективами применительно к разработке месторождений нетрадиционной нефти. Суть данной технологии заключается в подводе тепла в пласт путем закачки теплоносителя либо при помощи кондуктивного теплообмена. В результате нагрева пласта увеличивается подвижность находящихся в нем флюидов, а также могут реализовываться процессы химического разложения содержащихся в пласте углеводородов (для сланцевых месторождений и месторождений нефтематеринских пород — генерация синтетической нефти).

В традиционных подходах к моделированию процессов, возникающих при разработке месторождения, основное влияние уделяется движению флюидов в пласте. Однако при применении термических методов воздействия процесс разработки сопровождается появлением различных эффектов, таких как изменение свойств пластового флюида, протекание химических реакций, изменение фильтрационно-емкостных свойств пласта за счет изменения степени подвижности заполняющего поры флюида, геомеханических процессов, разрушения пласта. Частично данные эффекты учитываются в так называемом «композиционном» моделировании, более детально описывающем компонентный состав фаз. Однако в таких моделях отсутствует учет геомеханических эффектов и разрушения. При этом для понимания базовых процессов, происходящих в пласте в процессе термического воздействия, отсутствует необходимость в использовании композиционной модели.

Оценка эффективности термического воздействия на пласт возможна только при проведении комплексного моделирования основных процессов, происходящих в пласте, вклю-

чая геомеханические эффекты, а также разрушение пласта под влиянием внешнего воздействия. Кроме того, вследствие неизотермичности модели, дополнительным условием, предъявляемым к системе уравнений, является их термодинамическая согласованность.

Существует ряд моделей, позволяющих учитывать данные явления. В большинстве таких моделей повреждаемость среды описывается в рамках теории континуального разрушения [1,2]. Согласно данной теории разрушение пласта моделируется параметром повреждаемости (в общем случае являющимся тензором), эволюция которого описывается заданным кинетическим уравнением. Данный параметр входит в основные определяющие соотношения и влияет на фильтрационно-емкостные, термодинамические и геомеханические параметры пласта. Одновременно с этим описанные в литературе математические модели, используемые для моделирования прикладных задач, зачастую не являются термодинамически согласованными [3,4], а теоретически корректные самосогласованные термодинамические модели [5] не являются достаточно детальными для решения прикладных задач и не применяются для их решения.

Целью настоящей работы является разработка термодинамически согласованной физико-математической модели, позволяющей описывать эволюцию термoporоупругой среды с учетом процессов разрушения и пригодной для решения содержательных задач анализа разработки нефтяных месторождений. Модель рассматривается в полностью неизотермической постановке и является обобщением порoупругой модели Био [6] с учетом разрушения. Модель является термодинамически согласованной за счет выполнения второго закона термодинамики.

2 Основные законы сохранения

В настоящей модели рассматривается двухфазная насыщенная пористая среда, состоящая из двух взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов, одновременно занимающих один и тот же объем: пористого деформируемого скелета и подвижного насыщающего флюида. Задача рассматривается в приближении малых пространственных перемещений и деформаций в полностью трехмерной постановке. Состояние среды описывается системой законов сохранения массы (фильтрация флюида), импульса (геомеханика пласта) и энергии (термодинамика). Законы сохранения записываются с использованием эйлерова подхода к описанию движения.

Рассмотрим элементарный объем пространства Ω , в котором содержатся две фазы — скелет и флюид. Будем считать, что в каждой точке пространства присутствуют обе фазы. В момент времени $t = t_0$ положения материальных объемов скелета $\Omega_s(t_0)$ и флюида $\Omega_f(t_0)$ совпадают $\Omega = \Omega_s(t_0) = \Omega_f(t_0)$. Пусть скорости движения фаз равны \mathbf{v}_s и \mathbf{v}_f соответственно (рис. 1).

Запишем основные законы сохранения для обоих континуумов в момент времени $t = t_0$.

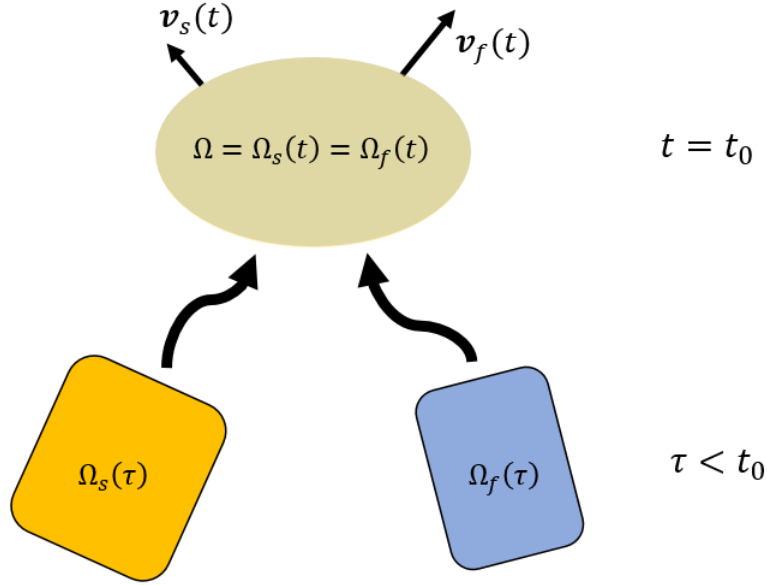


Рис. 1. Объем пространства Ω и материальные объемы Ω_f и Ω_s .

Закон сохранения массы. Для фазы α ($\alpha = s$ для скелета и $\alpha = f$ для флюида) закон сохранения массы имеет вид:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha d\Omega_\alpha = 0,$$

где m_α — масса фазы α в единице объема среды («смеси»), а $d_\alpha(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + \mathbf{v}_\alpha \cdot \text{grad}(\cdot)$ — материальная производная вдоль траектории движения фазы α . По определению материальной производной имеем:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[\frac{\partial m_\alpha}{\partial t} + \text{div}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \right] d\Omega_\alpha = 0.$$

Таким образом, при отсутствии внешних источников массы имеют место следующие выражения ([7]):

$$\frac{\partial m_s}{\partial t} + \text{div}(m_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} + \text{div}(m_f \mathbf{v}_f) = 0. \quad (2)$$

Введем вектор скорости фильтрации \mathbf{w} , равный:

$$\mathbf{w} = \frac{m_f}{\rho_f} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s),$$

где ρ_f — «истинная» плотность флюида, то есть масса флюида, отнесенная к занимаемому

им объему. Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(m_f \mathbf{v}_s) + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) = 0. \quad (3)$$

Закон сохранения импульса. Пусть \mathbf{f} — внешняя сила, $\mathbf{b}_\alpha^{\text{int}}$ — плотность сил взаимодействия фазы α с остальными фазами среды, \mathbf{t}_α — вектор напряжений, то есть сила, действующая на континуум α со стороны окружающих тел на элементе $d\omega_\alpha$ поверхности $\partial\Omega_\alpha(t)$. В этом случае закон сохранения импульса имеет вид ([8]):

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} (m_\alpha \mathbf{f} - \mathbf{b}_\alpha^{\text{int}}) d\Omega_\alpha + \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \mathbf{t}_\alpha d\omega_\alpha.$$

В соответствии с фундаментальной теоремой Коши ([7]) и формулой Грина имеем:

$$\int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \mathbf{t}_\alpha d\omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \mathbf{n} d\omega = \int_{\Omega_\alpha(t)} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha) d\Omega_\alpha,$$

где $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ — тензор парциальных напряжений для фазы α . Таким образом, воспользовавшись определением материальной производной, получаем:

$$\int_{\Omega_\alpha(t)} \left[\frac{\partial(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \otimes \mathbf{v}_\alpha) \right] d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} (m_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{b}_\alpha^{\text{int}}) d\Omega_\alpha + \int_{\Omega_\alpha(t)} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha) d\Omega_\alpha,$$

где символ « \otimes » обозначает тензорное произведение.

Рассмотрим левую часть последнего уравнения. В соответствии с формулой для дивергенции тензорного произведения получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[\frac{\partial(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \otimes \mathbf{v}_\alpha) \right] d\Omega_\alpha = \\ \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[\frac{\partial m_\alpha}{\partial t} \mathbf{v}_\alpha + \operatorname{div}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha + m_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_\alpha) \right] d\Omega_\alpha. \end{aligned}$$

Применяя закон сохранения массы, а также определение полной производной, получаем:

$$\int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} [m_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{b}_\alpha^{\text{int}} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha)] d\Omega_\alpha.$$

Приравнивая подынтегральные выражения в последней формуле, получаем закон сохранения импульса в виде:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_s) + m_s \left(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right) + \mathbf{b}_s^{\text{int}} = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) + m_f \left(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}_f}{dt} \right) + \mathbf{b}_f^{\text{int}} = 0, \quad (5)$$

причем $\mathbf{b}_f^{\text{int}} + \mathbf{b}_s^{\text{int}} = 0$.

Обозначим $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}_s$ — тензор полных напряжений. Тогда, после суммирования уравнений (4) и (5), получим:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + m_f \left(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}_f}{dt} \right) + m_s \left(\mathbf{f} - \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) выражает закон сохранения импульса для двухфазной системы «скелет»/«флюид».

Закон сохранения энергии. Для объема пространства $\Omega(t) = \Omega_s(t) = \Omega_f(t)$ уравнение, описывающее закон сохранения энергии, выглядит следующим образом:

$$\frac{d_f}{dt} (K_f + U_f) + \frac{d_s}{dt} (K_s + U_s) = (P_f + Q_f) + (P_s + Q_s), \quad (7)$$

где

$$K_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 d\Omega_\alpha$$

— кинетическая энергия фазы α ,

$$U_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha e_\alpha d\Omega_\alpha$$

— внутренняя энергия,

$$P_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{f}_\alpha d\Omega_\alpha + \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \mathbf{t}_\alpha \mathbf{v}_\alpha d\omega_\alpha$$

— мощность внешних сил,

$$Q_\alpha = - \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \mathbf{q}_\alpha \mathbf{n} d\omega_\alpha$$

— поток тепла. Здесь e_α — удельная внутренняя энергия фазы с учетом повреждаемости, \mathbf{q}_α — вектор плотности потока тепла.

Рассмотрим левую часть уравнения (7):

$$\frac{d_\alpha}{dt} (K_\alpha + U_\alpha) = \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[m_\alpha \left(e_\alpha + \frac{\mathbf{v}_\alpha^2}{2} \right) \right] d\Omega.$$

С другой стороны, применяя формулу Грина к правой части уравнения (7), получаем:

$$P_\alpha + Q_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} [\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q}_\alpha)] d\Omega.$$

Таким образом, закон сохранения энергии в интегральном виде выглядит следующим образом:

$$\int_{\Omega} \left[m_s \frac{d_s}{dt} \left(e_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) + m_f \frac{d_f}{dt} \left(e_f + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) \right] d\Omega = \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{v}_f + \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{v}_s) + (m_s \mathbf{v}_s + m_f \mathbf{v}_f) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q})] d\Omega, \quad (8)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{q}_f + \mathbf{q}_s$.

При переходе от парциального тензора напряжений для скелета к тензору полных напряжений уравнение (8) в дифференциальном виде примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[m_s \left(e_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) + m_f \left(e_f + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) \right] + \\ + \operatorname{div} \left[m_s \left(e_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) \mathbf{v}_s \right] + \operatorname{div} \left[m_f \left(e_f + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) \mathbf{v}_f \right] = \\ = \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{v}_s] + (m_s \mathbf{v}_s + m_f \mathbf{v}_f) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q}). \quad (9) \end{aligned}$$

3 Определяющие соотношения

В предыдущих разделах были сформулированы основные законы сохранения (массы, импульса, энергии), которые в рамках введенных предположений являются фундаментальными соотношениями механики сплошной среды. Для описания особенностей поведения конкретных сред необходимо ввести определяющие соотношения, то есть ограничения на поведение материала под влиянием внешнего воздействия.

Для построения теории определяющих соотношений Нолл [11] сформулировал ряд аксиом. В данных аксиомах изложены основные принципы, которым должны удовлетворять определяющие соотношения. Краткие формулировки данных принципов приведены далее [8,12].

Принцип детерминизма. Напряженное состояние в конфигурации частицы X в момент времени t определяется только предысторией χ^t движения тела вплоть до момента t .

Принцип локальности. Исключается влияние частиц, находящихся на некотором конечном расстоянии от рассматриваемой частицы X .

Принцип материальной независимости от системы отсчета. Определяющие соотношения должны быть инвариантны относительно смены системы отсчета.

Принцип термодинамической согласованности. Определяющие соотношения должны удовлетворять второму началу термодинамики для любой истории состояний (процесса).

Последний принцип накладывает существенные ограничения на вид определяющих соотношений и требует рассмотрения второго начала термодинамики, что будет сделано в следующих разделах.

4 Вывод диссипативного неравенства

Будем рассматривать термопоуругую среду, в которой в результате деформаций может возникнуть зона трещиноватости — диффузного разрушения, под которой понимается образование в твердой фазе зон микротрещиноватости. Существенным является то, что характерный размер трещин существенно меньше, чем размер представительного объема среды. По этой причине разрушение описывается определенной в пространстве величиной (в простейшем случае — скалярной), значения которой имеют смысл «степени поврежденности» среды.

В соответствии с классическими представлениями о механизмах развития трещин [9], для образования единицы площади её поверхности необходимо затратить определенную энергию. При этом в связи с тем, что процесс образования трещин является необратимым, изменение энтропии системы не меньше, чем количество тепла, полученное системой, а также работа сил, отвечающих за разрушение среды.

Таким образом, второе начало термодинамики без учета внешних источников имеет вид:

$$\int_{\Omega} \left(m_s \frac{d_s s_s}{dt} + m_f \frac{d_f s_f}{dt} \right) d\Omega \geq - \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \frac{\mathbf{q}_\alpha \mathbf{n}}{T} d\omega_\alpha + \frac{1}{T} \int_{\Omega} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} d\Omega, \quad (10)$$

где s_α — удельная энтропия, \mathbf{Y} — скорость диссипации энергии, связанной с разрушением материала, \mathbf{D} — тензор повреждаемости.

Применяя формулу Грина и переходя к дифференциальному виду, имеем следующее выражение:

$$m_s \frac{d_s s_s}{dt} + m_f \frac{d_f s_f}{dt} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \quad (11)$$

Определим свободную энергию Гельмгольца для фазы α как (считаем, что температуры фаз равны):

$$\psi_\alpha = e_\alpha - T s_\alpha,$$

тогда

$$d_\alpha \psi_\alpha = d_\alpha e_\alpha - T d_\alpha s_\alpha - s_\alpha d_\alpha T, \quad d_\alpha s_\alpha = \frac{1}{T} (d_\alpha e_\alpha - d_\alpha \psi_\alpha - s_\alpha d_\alpha T).$$

Соответственно, неравенство (11) будет иметь вид:

$$-\frac{1}{T} \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_f \frac{d_f \psi_f}{dt} - m_s \frac{d_s e_s}{dt} - m_f \frac{d_f e_f}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f s_f \frac{d_f T}{dt} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \quad (12)$$

Запишем закон сохранения энергии (9) в виде:

$$m_s \frac{d_s e_s}{dt} + m_f \frac{d_f e_f}{dt} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{v}_f + \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{v}_s) + m_s \mathbf{v}_s \left(\mathbf{f} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right) + m_f \mathbf{v}_f \left(\mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} \right) - \operatorname{div}(\mathbf{q}). \quad (13)$$

Воспользуемся выражением для баланса энергии флюида:

$$d\psi_f = d(e_f - T s_f) = \left[-pd \left(\frac{1}{\rho_f} \right) + T ds_f \right] - d(T s_f) = -pd \left(\frac{1}{\rho_f} \right) - s_f dT. \quad (14)$$

Подставляя уравнения (13) и (14) в (12), получим:

$$-\frac{1}{T} \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} + \frac{1}{T} \left[\operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{v}_s) + m_s \mathbf{v}_s \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) + m_f \mathbf{v}_f \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right) - \operatorname{div} \mathbf{q} \right] \geq 0,$$

откуда

$$-\left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) - \mathbf{q} \operatorname{grad}(T) + [\boldsymbol{\sigma}_f : \operatorname{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma}_s : \operatorname{grad}(\mathbf{v}_s)] - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} + \mathbf{v}_s \left[m_s \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_s) \right] + \left[m_f \mathbf{v}_f \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right) + (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) \right] \geq 0. \quad (15)$$

После подстановки выражения для закона сохранения импульса (6) в неравенство (15), получим:

$$-\left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + [\boldsymbol{\sigma}_f : \operatorname{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma}_s : \operatorname{grad}(\mathbf{v}_s)] - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} + (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \left[m_f \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right) + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_f \right] - \mathbf{q} \operatorname{grad}(T) \geq 0. \quad (16)$$

Левая часть неравенства (16) представима в виде суммы диссипаций скелета δ_s , флюида δ_f и тепловой диссипации δ_t :

$$\delta_s + \delta_f + \delta_t \geq 0, \quad (17)$$

где

$$\delta_s = - \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \quad (18)$$

$$+ [\boldsymbol{\sigma}_f : \text{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\mathbf{v}_s)] - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt},$$

$$\delta_f = (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \left[m_f \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right) + \text{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) \right], \quad (19)$$

$$\delta_t = -\frac{\mathbf{q}}{T} \text{grad}(T). \quad (20)$$

Эти соотношения далее используются для построения определяющих соотношений в рамках процедуры Колмана-Нолла.

5 Процедура Колмана-Нолла

В настоящей работе вид определяющих соотношений выводится с использованием процедуры Колмана-Нолла [13]. Основная идея данной процедуры заключается в том, что второй закон термодинамики должен быть выполнен для всех допустимых термодинамических процессов [14]. Колман и Нолл постулируют, что при наличии функциональных связей между параметрами, описывающими термодинамический процесс, вид данных зависимостей должен быть таким, чтобы второй закон термодинамики выполнялся при любой последовательности состояний.

Рассмотрим выражение (19) для диссипации флюида δ_f . Предполагая, что тензор напряжений флюида — шаровой (то есть $\boldsymbol{\sigma}_f = -(m_f/\rho_f)\mathbf{I}p$), получаем, что

$$\delta_f = \mathbf{w} \left[-\text{grad}(p) + \rho_f \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right) \right].$$

Условие $\delta_f \geq 0$ выполняется, если положить:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{k}}{\mu} \left[-\text{grad}(p) + \rho_f \left(\mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right) \right],$$

что соответствует феноменологическому закону Дарси. Здесь \mathbf{k} — симметричный положительно определенный тензор абсолютной проницаемости, μ — вязкость флюида. Следовательно, получаем, что:

$$\delta_f = \mathbf{w} \left(\frac{\mathbf{k}}{\mu} \right)^{-1} \mathbf{w} \geq 0.$$

Далее рассмотрим тепловую диссипацию δ_t . Воспользуемся законом Фурье в виде:

$$\mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \text{grad}(T),$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ — симметричный положительно определенный тензор коэффициентов теплопроводности. В этом случае получаем, что:

$$\delta_t = \frac{1}{T}(\nabla T)^T : \boldsymbol{\kappa} : \nabla T \geq 0.$$

Отсюда

$$\delta_f + \delta_t \geq 0,$$

и согласно процедуре Колмана-Нолла можно предположить, что для выполнения неравенства (17) достаточно, чтобы:

$$\begin{aligned} \delta_s = - \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \\ + [\boldsymbol{\sigma}_f : \text{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\mathbf{v}_s)] - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Введем тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Если рассматривать случай малых деформаций, тензор деформаций выражается через вектор перемещений $\boldsymbol{\xi}$ по формуле:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad} \boldsymbol{\xi} + \text{grad} \boldsymbol{\xi}^T).$$

Введем также пористость ϕ , определяемую как отношение массы флюида в рассматриваемом объеме к «истинной» плотности флюида: $\phi = m_f / \rho_f$.

Тогда, подставляя уравнение неразрывности (3) в выражение (21) и считая, что тензор напряжений флюида — шаровой, получаем выражение:

$$\delta_s = -m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} - m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + p \frac{d_s \phi}{dt} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \quad (22)$$

Будем считать, что свободная энергия Гельмгольца для скелета $\psi_s = \psi_s(\chi)$ зависит от следующих параметров:

$$\chi_\psi = \{\boldsymbol{\varepsilon}, \phi, T, \mathbf{D}\}.$$

Тогда выражение для $d\psi_s/dt$ имеет вид:

$$\frac{d_s \psi_s}{dt} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} \frac{d_s \phi}{dt} + \frac{\partial \psi_s}{\partial T} \frac{d_s T}{dt} + \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt}. \quad (23)$$

После подстановки (23) в (22) получаем:

$$\begin{aligned} \delta_s = \left(\boldsymbol{\sigma} - m_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \left(p - m_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} \right) \frac{d_s \phi}{dt} - \\ - \left(s_s + \frac{\partial \psi_s}{\partial T} \right) \frac{d_s T}{dt} - \left(\mathbf{Y} + m_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{D}} \right) \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Для того чтобы перейти от пористости ϕ к давлению p введем энергию Гиббса g_s , зависящую от параметров:

$$\chi_g = \{\boldsymbol{\varepsilon}, p, T, \mathbf{D}\},$$

такую, что

$$m_s g_s = m_s \psi_s - p \phi.$$

Тогда выражение (24), записанное через энергию Гиббса, примет вид:

$$\begin{aligned} \delta_s = & \left(\boldsymbol{\sigma} - m_s \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \left(\phi + m_s \frac{\partial g_s}{\partial p} \right) \frac{d_s p}{dt} - \\ & - \left(s_s + \frac{\partial g_s}{\partial T} \right) \frac{d_s T}{dt} - \left(\mathbf{Y} + m_s \frac{\partial g_s}{\partial \mathbf{D}} \right) \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Для выполнения принципа термодинамической согласованности и материальной независимости от системы отсчета достаточно, чтобы выполнялось неравенство (25). Частным решением данного неравенства являются соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma} = m_s \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}; \quad m_f = -\rho_f(p, T) m_s \frac{\partial g_s}{\partial p}; \quad s_s = -\frac{\partial g_s}{\partial T}; \quad \mathbf{Y} = -m_s \frac{\partial g_s}{\partial \mathbf{D}}, \quad (26)$$

обеспечивающие выполнение равенства $\delta_s = 0$ и являющиеся определением величин, стоящих в левой части равенств.

Отметим, что теперь определяющие соотношения для всех требуемых переменных заданы. Их конкретный вид определяется видом энергии g_s от переменных χ_g .

Введем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \text{ — тензор коэффициентов упругой деформации (4-го ранга),} \\ \mathbf{b} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial p} \text{ — тензор коэффициентов Био,} \\ \boldsymbol{\alpha}_T &= -\mathbf{C}^{-1} : \left(m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T} \right) \text{ — тензор термического расширения,} \\ \frac{1}{N} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial p} \text{ — модуль Био,} \\ \alpha_\varphi &= m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial T} \text{ — объемный коэффициент термического расширения скелета,} \\ C_{ps} &= -m_s T \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial T} \text{ — теплоемкость скелета,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{D}} \text{ — тензор коэффициентов разрушения, связанный с} \\
&\quad \text{деформацией породы,} \\
\boldsymbol{\omega} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \mathbf{D}} \text{ — тензор коэффициентов разрушения, связанный с} \\
&\quad \text{изменением порового давления,} \\
\boldsymbol{\theta} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \mathbf{D}} \text{ — тензор коэффициентов разрушения, связанный с} \\
&\quad \text{неизотермическими эффектами,} \\
\boldsymbol{\eta} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \text{ — тензор коэффициентов разрушения, связанный с} \\
&\quad \text{изменением поврежденности породы.}
\end{aligned} \tag{27}$$

Предположим, что коэффициент \mathbf{C} является линейной функцией от параметра повреждаемости \mathbf{D} , а $\boldsymbol{\gamma}$ — линейной функцией от тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, причем из (27) следует, что должно выполняться условие:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{D}} = m_s \frac{\partial^3 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2 \partial \mathbf{D}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{28}$$

Будем считать, что энергия Гиббса может быть представлена в виде многочлена относительно элементов вектора χ_g следующего вида:

$$\begin{aligned}
g_s &= g_s^0 + \left. \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\chi_g^0} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \left. \frac{\partial g_s}{\partial p} \right|_{\chi_g^0} \Delta p + \left. \frac{\partial g_s}{\partial T} \right|_{\chi_g^0} \Delta T + \left. \frac{\partial g_s}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\chi_g^0} \Delta \mathbf{D} + \\
&+ \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial p} \right|_{\chi_g^0} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta p + \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T} \right|_{\chi_g^0} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta T + \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{D}} \right|_{\chi_g^0} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta \mathbf{D} + \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial T} \right|_{\chi_g^0} \Delta p \Delta T + \\
&+ \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \mathbf{D}} \right|_{\chi_g^0} \Delta p \Delta \mathbf{D} + \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \mathbf{D}} \right|_{\chi_g^0} \Delta T \Delta \mathbf{D} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{\chi_g^0} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial p^2} \right|_{\chi_g^0} \Delta p^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial T^2} \right|_{\chi_g^0} \Delta T^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D}^2} \right|_{\chi_g^0} \Delta \mathbf{D}^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2 \partial \mathbf{D}} \right|_{\chi_g^0} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2 \Delta \mathbf{D}, \tag{29}
\end{aligned}$$

где $\Delta f = f - f^0$ для всех f .

Отметим, что из слагаемых третьего порядка по аргументам $\Delta \chi_g$ в уравнении (29) оставлено только последнее, содержащее $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2 \Delta \mathbf{D}$. Это связано с допущениями о том, что (а) \mathbf{C} линейно зависит от \mathbf{D} и (б) другие коэффициенты от \mathbf{D} не зависят (в частности от повреждаемости не зависят значения коэффициентов Био, модуля Био, теплоемкости среды и так далее). Допущение (б) можно мотивировать тем фактом, что образование новой поверхности трещин, вообще говоря, не означает, что образуется новый *объем* внутри трещины. Очевидно, что в этом случае все параметры модели, слабо зависящие от деформации, практически не меняются. Величина «трещиноватой» части внутренней энергии, таким образом, связана исключительно с образованием новой удельной поверхности тре-

щин.

Согласно правилу равноприсутствия [15] набор независимых параметров, присутствующих в одном определяющем соотношении, должен присутствовать и в остальных. Поскольку в качестве набора параметров выбран χ_g , то считаем, что $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\chi_g)$, $m_f = m_f(\chi_g)$, $s_s = s_s(\chi_g)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\chi_g)$.

Дифференцируя энергию Гиббса (29) в соответствии с выражениями (26), получим определяющие соотношения:

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\sigma} &= m_s \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial p} \Big|_{\chi_g^0} \Delta p + m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T} \Big|_{\chi_g^0} \Delta T + m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\mathbf{D} + \\
&\quad + m_s \frac{\partial^3 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2 \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \Delta\mathbf{D}, \\
\Delta m_f &= -\rho_f(p, T) m_s \frac{\partial g_s}{\partial p} = -\rho_f m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - m_s \left(\rho_f \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial p} \Big|_{\chi_g^0} + \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial g_s}{\partial p} \right) \Delta p - \\
&\quad - m_s \left(\rho_f \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial T} \Big|_{\chi_g^0} + \frac{\partial \rho_f}{\partial T} \frac{\partial g_s}{\partial T} \right) \Delta T - \rho_f m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\mathbf{D}, \\
\Delta S_s &= - \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial p} \Big|_{\chi_g^0} \Delta p - \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial T} \Big|_{\chi_g^0} \Delta T - \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\mathbf{D}, \\
\Delta \mathbf{Y} &= - m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial p} \Big|_{\chi_g^0} \Delta p - m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial T} \Big|_{\chi_g^0} \Delta T - m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\mathbf{D} - \\
&\quad - \frac{1}{2} m_s \frac{\partial^3 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^2.
\end{aligned} \tag{30}$$

С учетом (27) получаем конечный вид определяющих соотношений для скелета и флюида:

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{\sigma} &= \left(\mathbf{C}(\mathbf{D}^0) + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{D}^0)}{\partial \mathbf{D}} : \Delta\mathbf{D} \right) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0) : \Delta\mathbf{D}, \\
\Delta m_f &= \rho_f \mathbf{b} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T + \rho_f \boldsymbol{\omega} : \Delta\mathbf{D}, \\
\Delta S_s &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T + \boldsymbol{\theta} : \Delta\mathbf{D}, \\
\Delta \mathbf{Y} &= \left(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \right) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \Delta p + \boldsymbol{\theta} \Delta T + \boldsymbol{\eta} : \Delta\mathbf{D},
\end{aligned} \tag{31}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \phi \frac{1}{K_f}, \quad \alpha_m = \alpha_\phi + \phi \alpha_f, \quad S_\alpha = m_\alpha s_\alpha,$$

где K_f — модуль объемного сжатия флюида, C_{pf} — теплоемкость флюида, α_f — коэффициент теплового расширения флюида.

Рассмотрим подробнее часть выражения для напряжения, отвечающую за деформа-

цию и повреждаемость:

$$\Delta\sigma = \left(\mathbf{C}(\mathbf{D}^0) + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{D}^0)}{\partial \mathbf{D}} : \Delta \mathbf{D} \right) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \gamma(\boldsymbol{\varepsilon}^0) : \Delta \mathbf{D}.$$

В соответствии с предположением о линейной зависимости для \mathbf{C} и γ (28) данные коэффициенты можно представить в виде:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}, \quad \gamma = -\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= (\mathbf{A}\mathbf{D}^0 + \mathbf{B} + \mathbf{A}(\mathbf{D} - \mathbf{D}^0)) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + (\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{M}) : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^0) = \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon}^0 + (\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{M}) : \mathbf{D} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{M}) : \mathbf{D}^0 = \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathbf{D} - \mathbf{M}\mathbf{D} - \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathbf{D}^0 + \mathbf{M}\mathbf{D}^0 = \\ &= [(\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{A}\mathbf{D}^0 + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon}^0] - [\mathbf{M}\mathbf{D} - \mathbf{M}\mathbf{D}^0] = \Delta(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta(\mathbf{M} : \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Если $\mathbf{M} = 0$, то $\Delta\sigma = \Delta(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon})$.

Далее запишем выражения для внутренней энергии скелета и флюида. Внутренняя энергия скелета выражается через энергию Гиббса по формуле:

$$\Delta E_s = m_s \Delta e_s = m_s \Delta \psi_s + m_s \Delta(Ts_s) = m_s \Delta g_s + \Delta(p\phi) + \Delta(TS_s).$$

С учетом соотношений (29) и (31) выражение для внутренней энергии скелета примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta E_s &= \boldsymbol{\sigma}^0 \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \underline{\phi^0 \Delta p} - \underline{S_s^0 \Delta T} - \mathbf{Y}^0 \Delta \mathbf{D} - \mathbf{b} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta T - \gamma^0 \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta \mathbf{D} + \\ &+ \alpha_\varphi \Delta p \Delta T - \boldsymbol{\omega} \Delta p \Delta \mathbf{D} - \boldsymbol{\theta} \Delta T \Delta \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{C}^0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{N} \Delta p^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T^2 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} \Delta \mathbf{D}^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2 \Delta \mathbf{D} + \\ &\quad + \underline{\Delta(p\phi)} + \underline{\Delta(S_s T)}. \end{aligned}$$

Преобразуем подчеркнутые слагаемые в последнем выражении:

$$\begin{aligned} -\phi^0 \Delta p + \Delta(\phi p) &= -\phi^0 \Delta p + \phi^0 \Delta p + p \Delta \phi = p \Delta \phi = p \left(\mathbf{b} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\Delta p}{N} - \alpha_\phi \Delta T + \boldsymbol{\omega} : \Delta \mathbf{D} \right), \\ -S_s^0 \Delta T + \Delta(S_s T) &= T \Delta S_s = T \left(\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T + \boldsymbol{\theta} : \Delta \mathbf{D} \right). \end{aligned}$$

С учетом данных выражений внутренняя энергия скелета окончательно записывается

в виде:

$$\begin{aligned} \Delta E_s = & \left[\boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{C}^0 : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \\ & + \left[\frac{1}{N} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_\varphi \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p + \left[-\alpha_\phi \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T + \\ & - \left[\mathbf{Y}^0 + \left(\boldsymbol{\gamma}^0 + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^0}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega} p^0 - \boldsymbol{\theta} T^0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta} \Delta \mathbf{D} \right] \Delta \mathbf{D}. \quad (32) \end{aligned}$$

Дополним данные определяющие соотношения выражениями для флюида. Предположим, что удельная свободная энергия Гельмгольца флюида ψ_f зависит от двух параметров: плотности флюида ρ_f и температуры T :

$$\chi_{\psi_f} = \{\rho_f, T\}.$$

Тогда полный дифференциал можно записать в виде:

$$d\psi_f = \frac{\partial \psi_f}{\partial \rho_f} d\rho_f + \frac{\partial \psi_f}{\partial T} dT.$$

Введем удельную энергию Гиббса для флюида, зависящую от давления p и температуры T :

$$\chi_{g_f} = \{p, T\}.$$

Полный дифференциал для энергии Гиббса можно выразить через свободную энергию Гельмгольца по формуле:

$$dg_f = d\psi_f + p \frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial \psi_f}{\partial \rho_f} d\rho_f + \frac{\partial \psi_f}{\partial T} dT + p d \frac{1}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_f} dp.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \psi_f}{\partial \rho_f} = \frac{p}{\rho_f^2}, \quad \frac{\partial \psi_f}{\partial T} = -s_f,$$

тогда

$$\frac{\partial g_f}{\partial p} = \frac{1}{\rho_f}, \quad \frac{\partial g_f}{\partial T} = -s_f.$$

Предположим, что флюид является слабосжимаемой жидкостью, тогда удельную энергию Гиббса можно представить в квадратичном виде:

$$g_f = g_f^0 + \frac{\partial g_f}{\partial p} \Big|_{\chi_{g_f}^0} \Delta p + \frac{\partial g_f}{\partial T} \Big|_{\chi_{g_f}^0} \Delta T + \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial T} \Big|_{\chi_{g_f}^0} \Delta p \Delta T + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_f}{\partial p^2} \Big|_{\chi_{g_f}^0} \Delta p^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_f}{\partial T^2} \Big|_{\chi_{g_f}^0} \Delta T^2. \quad (33)$$

Введем следующие коэффициенты:

$$\frac{1}{K_f} = -\rho_f \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial p} \text{ — коэффициент объемного расширения флюида,} \quad (34)$$

$$\alpha_f = \rho_f \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial T} \text{ — объемный коэффициент термического расширения флюида,} \quad (35)$$

$$C_{pf} = -T m_f \frac{\partial^2 g_f}{\partial T \partial T} \text{ — теплоемкость флюида.} \quad (36)$$

Тогда определяющие соотношения для плотности ρ_f и удельной энтальпии флюида s_f примут вид:

$$\Delta \frac{1}{\rho_f} = \Delta \left(\frac{\partial g_f}{\partial p} \right) = \frac{\partial^2 g_f}{\partial p^2} \Big|_{x_g^0} \Delta p + \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial T} \Big|_{x_g^0} \Delta T = -\frac{1}{\rho_f} \frac{1}{K_f} \Delta p + \frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta T, \quad (37)$$

$$\Delta s_f = \Delta \left(-\frac{\partial g_f}{\partial T} \right) = -\frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial T} \Big|_{x_g^0} \Delta p - \frac{\partial^2 g_f}{\partial T^2} \Big|_{x_g^0} \Delta T = -\frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta p + \frac{C_{pf}}{m_f} \frac{\Delta T}{T^0}. \quad (38)$$

Внутренняя энергия флюида выражается через энергию Гиббса по формуле:

$$\Delta e_f = \Delta g_f + \Delta \left(p \frac{1}{\rho_f} \right) + \Delta(T s_f),$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta e_f &= -\frac{1}{\rho_f^0} \Delta p - s_f^0 \Delta T + \frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta p \Delta T - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_f} \frac{1}{K_f} \Delta p^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{pf}}{T^0} \Delta T^2 + \Delta \left(p \frac{1}{\rho_f} \right) + \Delta(T s_f) = \\ &= p \Delta \frac{1}{\rho_f} + T \Delta s_f - \frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta p \Delta T - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_f} \frac{1}{K_f} \Delta p^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{pf}}{m_f T^0} \Delta T^2 = \\ &= \frac{1}{\rho_f} \left[\frac{p}{K_f} \Delta p - \alpha_f p \Delta T - \alpha_f T \Delta p + \frac{C_{pf}}{m_f T^0} \frac{T}{T^0} \Delta T + \alpha_f \Delta p \Delta T - \frac{1}{2} \frac{1}{K_f} \Delta p^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{pf}}{T^0} \Delta T^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\rho_f} \left\{ \left[\frac{1}{K_f} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_f \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p - \left[\alpha_f \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \frac{C_{pf}}{\phi T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

6 Система уравнений модели

Введем следующие предположения:

- зависимостью плотности материала скелета от давления пренебрегается;
- влиянием внешних сил пренебрегается;
- влияние инерционных сил пренебрежимо мало;
- кинетическая энергия флюида пренебрежимо мала по сравнению с величиной внутренней энергии;

- скорость движения скелета пренебрежимо мала по сравнению со скоростью течения флюида.

С учетом данных допущений система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) &= 0, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + (m_s + m_f) \mathbf{f} &= 0, \\
\frac{\partial (m_s e_s + m_f e_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f e_f \mathbf{w}) &= \operatorname{div}(-p \mathbf{w}) + (m_s \mathbf{v}_s + m_f \mathbf{v}_f) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q}), \\
\mathbf{w} = \frac{\mathbf{k}}{\mu} [-\operatorname{grad}(p) + \rho_f \mathbf{f}], \quad \mathbf{q} &= -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad}(T).
\end{aligned} \tag{40}$$

Для замыкания данной системы используются определяющие соотношения (31), (32), (39) и закон развития повреждаемости со временем в виде зависимости

$$D = D(\chi).$$

Если в дополнение к сделанным ввести следующие допущения:

- параметр повреждаемости является скалярным параметром;
- коэффициенты разрушения $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\theta} = 0$, $\boldsymbol{\eta} = 0$,

то таким образом система (40) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) &= 0, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= 0, \\
\frac{\partial (m_s e_s + m_f e_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f e_f \mathbf{w}) &= \operatorname{div}(-p \mathbf{w}) - \operatorname{div}(\mathbf{q}), \\
\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \operatorname{grad}(p), \quad \mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad}(T), \quad D &= D(t).
\end{aligned} \tag{41}$$

Для уточнения вида определяющих соотношений требуется получить конкретный вид зависимости тензора упругих коэффициентов \mathbf{C} от повреждаемости D . Отметим, что процедура Колмана-Нолла не позволяет однозначно установить вид данной зависимости, однако характерное поведение \mathbf{C} может быть получено из общих соображений, отражающих тот факт, что D — параметр *повреждаемости*. Это означает, что с ростом D должен «убывать» \mathbf{C} (то есть среда оказывает меньшее сопротивление нагрузке). В простейшем случае такая зависимость может быть выражена формулой [16]:

$$\mathbf{C}(D) = \tilde{\mathbf{C}}(1 - D), \tag{42}$$

где $\tilde{\mathbf{C}}$ — тензор упругих коэффициентов неповрежденного материала. Таким образом, в соответствии с выражением (28) коэффициент γ зависит от тензора деформаций как

$$\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}) = \tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Таким образом, определяющие соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}(1 - D) : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b}\Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T\Delta T - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \Delta D, \\ \Delta m_f &= \rho_f \mathbf{b} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T, \\ \Delta S_s &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T, \\ \Delta Y &= \mathbf{C} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \Delta \frac{1}{\rho_f} &= \frac{1}{K_f} \Delta p - \alpha_f \Delta T, \\ \Delta S_f &= -\alpha_f \Delta p + \frac{C_{pf}}{T^0} \Delta T.\end{aligned}\tag{43}$$

Стоит отметить, что представленный вид диссипативной энергии \mathbf{Y} совпадает используемым в литературе, см., например, [17].

Выражение для внутренней энергии скелета имеет вид:

$$\Delta E_s = \Delta E_{s\varepsilon} + \Delta E_{sp} + \Delta E_{sT} + \Delta E_{sD},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta E_{s\varepsilon} &= \left[\boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2} \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \Delta E_{sp} &= \left[\frac{1}{N} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_\varphi \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p, \\ \Delta E_{sT} &= \left[-\alpha_\varphi \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T, \\ \Delta E_{sD} &= - \left[\mathbf{Y}^0 + \mathbf{C} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \right] \Delta D.\end{aligned}\tag{44}$$

Выражение для внутренней энергии флюида имеет вид:

$$\Delta E_f = \left[\frac{\phi}{K_f} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \phi \alpha_f \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p - \left[\phi \alpha_f \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \frac{C_{pf}}{T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T.\tag{45}$$

7 Моделирование разрушения среды

В представленном выше выводе параметр \mathbf{D} является феноменологическим параметром. Его физический смысл как параметра разрушаемости связан с определенными механическими процессами в среде и может быть определен только с помощью дополнительных предположений. Настоящий раздел посвящен анализу данного вопроса.

В работе [18] понятие разрушения материала понимается как «исчерпание несущей способности тела, происшедшее или вследствие наступления беспрепятственного пласти-

ческого течения (неограниченного изменения формы) или вследствие накопления повреждений и развития трещин». Существует несколько подходов к моделированию процессов разрушения, основными из которых являются механика развития трещин и континуальная механика разрушения.

Первый класс подходов, предложенный А. Гриффитсом [19], рассматривает каждую трещину как отдельный объект, имеющий определенные границы, причем трещина является поверхностью разрыва параметров сплошной среды. В данном подходе предполагается, что рост трещины происходит при достижении определенного критического состояния сплошной среды (критерий разрушения).

Второй подход был предложен Ю.Н. Работновым [1] и Л.М. Качановым [2]. В рамках данной теории предполагается, что разрушение материала вызвано наличием в материале множества различных микротрещин и микропор, при этом «эффективные» прочностные свойства среды будут зависеть от степени разрушения. Описание процесса накопления повреждений материала производится при помощи некоторого макроскопического параметра. В качестве такого параметра используется параметр повреждаемости $0 \leq D \leq 1$ (Ю.Н. Работнов) или параметр сплошности $\psi = 1 - D$ (Л.М. Качанов).

В настоящей работе разрушение описывается с точки зрения механики континуального разрушения. При этом рассматриваются достаточно медленные, квазистатические процессы, а пластические деформации отсутствуют. Для описания степени разрушения среды используется параметр повреждаемости, который может быть как скалярной величиной, так и тензором второго или четвертого ранга. Значение параметра, равное 0, соответствует состоянию среды в отсутствие повреждений, а 1 — полному разрушению. Различные способы интерпретации данного параметра приводятся далее.

Интерпретация параметра повреждаемости. В наиболее простом случае, когда разрушение изотропно (то есть происходит одинаково во всех направлениях), параметр повреждаемости является скалярной величиной и имеет смысл поверхностной плотности пересечений микротрещин с любой плоскостью внутри тела, имеющей нормаль \mathbf{n} ([4]) (рисунок 2).

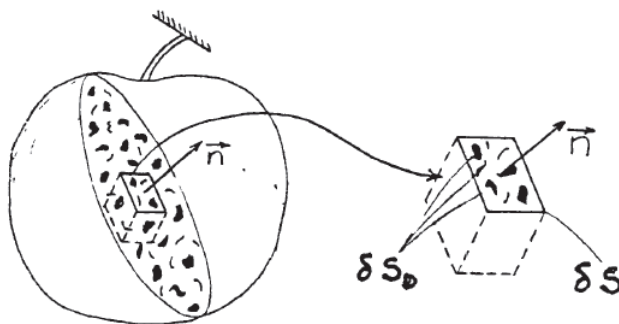


Рис. 2. Интерпретация скалярного параметра повреждаемости ([4]).

Рассмотрим некоторую плоскость, проходящую через элементарный объем поврежденной среды, и пусть S — общая площадь сечения элемента плоскостью, а S_D — суммарная площадь поверхности сечения, имеющей повреждения. Тогда параметр повреждаемости определяется как ([2,20]):

$$D = \frac{S_D}{S}, \quad \mathbf{D} = D \cdot \mathbf{I}. \quad (46)$$

В случае если имеют место сразу несколько механизмов разрушения [17], то для каждого процесса может быть введен свой скалярный параметр. Например, согласно [21] при анализе разрушения композитных материалов естественно ввести свой параметр повреждаемости для каждой фазы композита.

Как правило, разрушение материала неізотропно. В этом случае параметр повреждаемости имеет тензорный вид. Рассмотрим элементарную площадку dS , ориентированную нормалью \mathbf{n} . Тогда параметр повреждаемости можно представить в виде оператора, являющегося тензором второго ранга и преобразующего данную поврежденную поверхность в некоторую неповрежденную (эффективную) с площадью $d\tilde{S} = dS - dS_D$ и нормалью $\tilde{\mathbf{n}}$ ([3]). В этом случае аналог формулы (46) имеет вид:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}) \mathbf{n} dS = \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S}. \quad (47)$$

Дальнейшее обобщение этой модели представлено в работах [22–25]. В них предполагается, что параметр повреждаемости является тензором четвертого или более высокого ранга. В дополнение к предыдущему описанию для выбранной площадки вводится некоторый опорный вектор $\boldsymbol{\nu}$ таким образом, чтобы тензор $\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{n} dS$ описывал исходную геометрическую конфигурацию (рисунок 3). Соответственно, формула (47) принимает вид:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}) : (\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{n}) dS = \boldsymbol{\nu} \otimes \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S}. \quad (48)$$

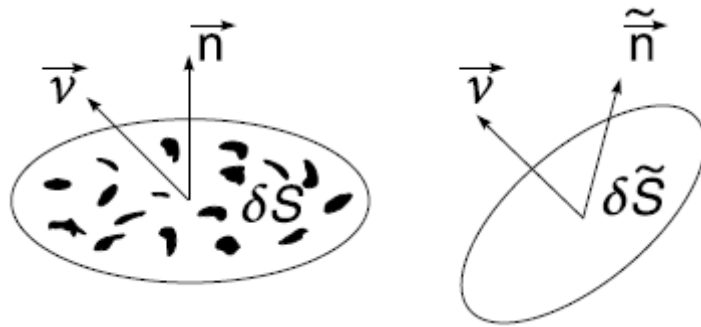


Рис. 3. Интерпретация тензорного параметра повреждаемости ([17]).

В рамках данного подхода к описанию параметра повреждаемости часто вводится также понятие эффективного напряжения $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, то есть напряжения, действующего на неповрежденную часть поверхности ([17]). Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ — напряжение, приложенное к некоторому

поврежденному элементу поверхности, тогда в общем случае из баланса сил:

$$\tilde{\sigma} \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S} = \sigma \mathbf{n} dS.$$

Тогда, применяя (48):

$$\tilde{\sigma} (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : (\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{n}) dS = \sigma (\boldsymbol{\nu} \otimes \mathbf{n}) dS$$

или

$$\tilde{\sigma} = \sigma (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1}.$$

Существуют и другие подходы к определению параметра повреждаемости. Например, в [3] для моделирования повреждения при ползучести в металлах используется параметр повреждаемости, являющийся тензором второго ранга. Рассмотрим некоторый элементарный объем V . Пусть площадь поверхности k -ой ($k = \overline{1, N}$) поры в межзерновом пространстве равна $dS_g^{(k)}$, а нормальный вектор равен $\mathbf{n}^{(k)}$ (рисунок 4). Тогда параметр повреждаемости можно определить как

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^N \int_{S_k} \frac{1}{S^{(k)}(V)} \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} dS_g^{(k)},$$

где $S^{(k)}(V)$ — площадь сечения объема V плоскостью, проходящей через элемент поверхности $dS_g^{(k)}$.

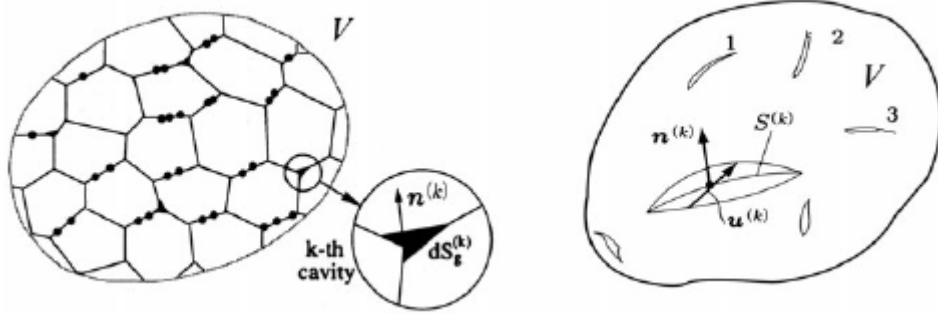


Рис. 4. Разрушение материала, вызванное наличием пор в межзерновом пространстве (слева) и микротрещин (справа) ([26]).

С другой стороны ([27]), параметр повреждаемости можно описать с точки зрения развития микротрещин в материале (рисунок 4, справа). Тогда:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{V} \sum_k \int_{S^{(k)}} \mathbf{u}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} dS^{(k)},$$

где $S^{(k)}$ — поверхность k -й микротрещины до начала раскрытия, $\mathbf{n}^{(k)}$ и $\mathbf{u}^{(k)}$ — нормальный

вектор и скачок перемещений в каждой точке трещины.

Еще один подход к определению параметра повреждаемости, описанный в [28–30], основан на статистическом анализе распределения микропор в материале. Рассмотрим некоторую сферическую поверхность S^2 вокруг рассматриваемой точки. Введем функцию распределения $\xi(\mathbf{n})$ площади микропор на некоторой элементарной площадке dA , имеющей нормаль \mathbf{n} . В соответствии с [29] функцию распределения можно разложить в ряд:

$$\xi(\mathbf{n}) = D_0 + \mathbf{D}_1 : \mathbf{f}_1(\mathbf{n}) + \mathbf{D}_2 : \mathbf{f}_2(\mathbf{n}) + \dots,$$

где $\mathbf{f}_{1,2}$ — неприводимые тензорные базисы второго и четвертого рангов соответственно, $D_0, \mathbf{D}_{1,2}$ — скалярный и тензорные (второго и четвертого ранга соответственно) коэффициенты, имеющие смысл параметров повреждаемости. Символ «:» обозначает двойное скалярное произведение (свертку).

С учетом некоторых преобразований ([31]) из данного выражения следует:

$$D_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \xi(\mathbf{n}) d\Omega,$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{3 \times 5}{2} \int_{S^2} \xi(\mathbf{n}) \mathbf{f}_1(\mathbf{n}) d\Omega,$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9}{2 \times 3 \times 4} \int_{S^2} \xi(\mathbf{n}) \mathbf{f}_2(\mathbf{n}) d\Omega.$$

Кинетическое уравнение для параметра повреждаемости. Поскольку параметру повреждаемости может быть дано статистическое толкование ([18]), то его изменение может быть описано некоторым кинетическим уравнением. Кинетическое уравнение может быть получено в результате лабораторных экспериментов и в общем виде записывается как

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = F(\mathbf{D}, \dots),$$

где F зависит от \mathbf{D} и таких переменных, как тензор напряжений, температура, время и так далее. В случае если текущая реакция повреждающегося материала зависит от предыстории состояний, то такую кинетику разрушения называют конечной. В ином случае — мгновенной [5]. Рассмотрим примеры зависимостей для каждого из этих случаев.

Конечная кинетика разрушения. Модель конечной кинетики разрушения характеризуется тем, что текущая степень поврежденности материала зависит от предыдущих состояний среды. В работе [18] рассматривается пример кинетического уравнения такого вида для случая изотермического разрушения сплошной среды при одноосном растяжении. При этом скорость изменения скалярного параметра повреждаемости зависит только

от максимальной величины растягивающего напряжения σ_{\max} по степенному закону вида:

$$\frac{dD}{dt} = A \left(\frac{\sigma_{\max}}{1-D} \right)^n,$$

где A — положительный коэффициент, n — неотрицательный показатель степени.

В более общем виде ([1,16,32]) уравнение для параметра поврежденности при растяжении однородного стержня представимо в виде

$$\frac{dD}{dt} = c\sigma^k(1-D)^{-s},$$

где σ — напряжение, а $c > 0, k > 0, s \geq 0$ — в общем виде функции некоторых параметров.

Дальнейшее развитие данных подходов привело к появлению модели Качанова-Работнова-Хэйхерста ([33]), которая подходит для описания изотропной ползучести материала в случае одноосного и многоосного напряженных состояний. Кинетическое уравнение имеет вид, аналогичный закону Аррениуса:

$$\frac{dD}{dt} = A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \frac{\langle \sigma_{\text{eq}}^D \rangle^m}{(1-D)^l}, \quad \langle \sigma_{\text{eq}}^D \rangle = \frac{1}{2} (\sigma_{\text{eq}}^D + |\sigma_{\text{eq}}^D|),$$

где A, l, m — параметры материала, Q — энергия активации для процесса повреждаемости, R — константа Больцмана, T — температура. Выражение для эквивалентного напряжения σ_{eq}^D может быть представлено в следующем виде:

$$\sigma_{\text{eq}}^D = a\sigma_1 + 3b\sigma + c\sigma_{\text{eq}},$$

где a, b, c — некоторые константы, σ_1 — максимальное главное напряжение, σ — среднее напряжение, σ_{eq} — эквивалентное напряжение по Мизесу.

В работе [34] представлено следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{dD}{dt} = AD^2 + BD - C(\tau - \tau^*),$$

где A, B, C — параметры материала, τ — максимальное касательное напряжение в рассматриваемой плоскости, а τ^* — пороговое его значение.

В работе [35] для моделирования разрушения горных породах при одноосном и многоосном сжатии использовался следующий закон эволюции параметра повреждаемости:

$$\frac{dD}{dt} = c\delta \frac{\gamma\xi_D}{1+\gamma\xi_D} \left(1 - \frac{D}{D_c}\right) \frac{d\xi_D}{dt},$$

где D_c — критическое значение повреждаемости, $\xi_D = (e_{ij}e_{ij})^{1/2}$ — эквивалентная деформация, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta/3$ — девиатор тензора деформаций, c — параметр нагрузки. В работе также приводится таблица с параметрами δ и γ для некоторых материалов (таблица 1).

Таблица 1. Параметры материалов, приведенные в работе [35]

Тест	Материал	δ	γ
Одноосное сжатие	Мрамор	665	760
Одноосное сжатие	Известняк	1015	500
Одноосное сжатие	Гранодиорит	385	140
Одноосное сжатие	Бетон I	616	760
Одноосное сжатие	Бетон II	616	214
Одноосное сжатие	Бетон III	616	214
Трехосное сжатие	Кварцит	546	190
Трехосное сжатие	Кварцит	448	156

Таблица 2. Параметры материалов, приведенные в работе [36]

Материал	$C_d, 1/c$	β	ξ_0
Гранит	3	0	-0,56
Гранит	2,2	0,15	-0,62
Песчаник	50	0,5	-0,8
Песчаник	50	0,5	-1,0

В работе [36] представлена модель разрушения материала с учетом вязкопластических эффектов в следующем виде:

$$\frac{dD}{dt} = C_d I_2 (D^\beta \xi - \xi_0),$$

где $\xi = I_1/\sqrt{I_2}$, I_1 и I_2 — соответственно первый и второй инварианты тензора деформаций,

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad I_2 = -\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2,$$

где ε_{ij} — компонента тензора деформаций.

Для определения коэффициентов C_d , β , ξ_0 авторами были проведены лабораторные эксперименты на образцах песчаника и гранита. Результаты приведены в таблице 2.

В работе [37] представлено две модели кинетики разрушения материала, полученные в результате экспериментов с газовой пушкой. Первая модель основана на расчете скорости распространения упругой волны:

$$D = 1 - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2,$$

где c_0 и c — скорости распространения продольных упругих волн в неповрежденном и поврежденном материале соответственно.

Вторая модель основана на исследовании развития микротрещиноватости в образце

горной породы и имеет следующий вид:

$$\frac{dD}{dt} = (1 - D)^2 \left(\frac{D}{1 - D} A_0 + N_0 \right) \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_0} - 1 \right)^\chi,$$

где σ_s — растягивающее напряжение, σ_0 — величина напряжения при пороговом значении параметра повреждаемости, A_0, N_0, χ — параметры материала. В расчетах, приведенных в статье [37], использовались следующие значения параметров: $N_0 = 5.2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$, $A_0 = 9.8 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\sigma_0 = 30 \text{ МПа}$, $\chi = 1.3$.

В работе [38] на основе анализа баланса энергии получено следующее уравнение:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\sigma_{\text{eq}}(1 - D)}{BD^{n-1}(1 - D)^3 - \sigma_{\text{eq}}^2} \frac{d\sigma_{\text{eq}}}{dt},$$

где σ_{eq} — эквивалентное напряжение по Мизесу, B, n — параметры материала.

В работе [39] предполагается, что скорость накопления повреждений определяется затратами энергии на создание новых свободных поверхностей. Для однородной изотропной среды предлагается кинетическое уравнение вида:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\langle \alpha I_1 + \alpha_J J - \gamma - \beta D \rangle}{\tau \beta}, \quad \langle x \rangle = \min(0, x),$$

где I_1 — первый инвариант тензора малых деформаций, J — интенсивность касательных деформаций, τ — время релаксации, $\alpha, \alpha_J, \gamma, \beta$ — параметры модели.

Мгновенная кинетика разрушения. Мгновенная кинетика разрушения предполагает, что значение параметра повреждаемости зависит только от текущего состояния среды. Одной из наиболее известных моделей для данного случая является модель Мазарса [40], описывающая повреждение цемента при одноосном нагружении с учетом его нагрева. В данной модели предполагается, что параметр поврежденности D представляет из себя взвешенную сумму параметров поврежденности при растяжении D_t и сжатии D_c :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c,$$

где α_t и α_c — весовые коэффициенты, а

$$D_i = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_i)}{\varepsilon_{\text{eq}}} - A_i \exp[-B_i(\varepsilon_{\text{eq}} - \varepsilon_{d0})], \quad i = t, c,$$

ε_{d0} , A_i , B_i — параметры материала. Эффективное напряжение ε_{eq} можно выразить через главные напряжения по формуле:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},$$

где ε_i — главные деформации.

Для весовых коэффициентов α_t и α_c в работе [40] предлагаются выражения вида:

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{ti}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\varepsilon_{eq}^2}, \quad \alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{ci}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\varepsilon_{eq}^2},$$

где $H_i = 1$, если $\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci} \geq 0$, и $H_i = 0$ в других случаях.

На основе данной модели в работе [41] предложена зависимость параметра повреждаемости от эквивалентных деформаций в следующем виде:

$$D = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \{1 - \alpha + \alpha \exp[-\gamma(\kappa - \kappa_0)]\},$$

где κ — функция эквивалентной деформации, называемая исторической переменной, κ_0 — пороговое значение этой функции, α , γ — параметр материала. При этом данные параметры не обязательно имеют постоянные значения и могут зависеть, например, от температуры ([42]).

Данная формула использовалась в работе [43] для моделирования трещинообразования в цементе. Увеличение параметра поврежденности D определяется с помощью параметра κ , называемого пороговым разрушением и равного максимальному значению эффективной степени деформации $\tilde{\varepsilon}$, достигнутому в процессе нагрузки породы:

$$\kappa(\tau) = \max_{\tau \leq t} \tilde{\varepsilon}(\tau),$$

где для расчета $\tilde{\varepsilon}$ предлагается следующее выражение:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k} \sqrt{\left(\frac{k-1}{1-2\nu} I_1^\varepsilon\right)^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon},$$

где параметр k равен отношению сжимающего и растягивающего сопротивления материала, а I_1^ε и J_2^ε — первый инвариант тензора деформаций и второй инвариант девиаторной части тензора деформаций:

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad J_2^\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{6} (I_1^\varepsilon)^2.$$

Для тестовых расчетов использовались следующие значения параметров: $\kappa_0 = 7 \cdot$

10^{-5} , $\alpha = 0.92$, $\beta = 250$.

В [44] представлен обобщенный вид зависимости параметра повреждаемости от некоторого скалярного параметра \tilde{x} :

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } \tilde{x} < \tilde{x}_c; \\ D_{\max} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}_c}{\tilde{x}_{\text{off}} - \tilde{x}_c}, & \text{если } \tilde{x}_c \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_{\text{off}}; \\ 1 - (1 - D_{\max}) \frac{\tilde{x}_{\text{off}}}{\tilde{x}}, & \text{если } \tilde{x} > \tilde{x}_{\text{off}}, \end{cases}$$

где в качестве параметра x может использоваться напряжение σ или деформация ε .

В случае использования в качестве опорного параметра напряжения функция $\tilde{\sigma}$ может равняться максимальному главному напряжению $\tilde{\sigma} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ или вычисляться на основе критерия Друкера-Прагера [45]:

$$\tilde{\sigma} = \alpha I_1 + \sqrt{J_2},$$

где α — константа, зависящая от материала, I_1 — первый инвариант тензора напряжений, J_2 — второй инвариант тензора девиатора напряжений.

При использовании деформации в качестве параметра x , авторы предлагают вычислять функцию $\tilde{\varepsilon}$ исходя из энергетического критерия ([46]):

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{E} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}},$$

где E — модуль Юнга, \mathbf{C} — тензор упругих коэффициентов. Кроме того, данную функцию можно вычислять по формуле, предложенной Мазарсом ([40]):

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},$$

где ε_i — главные деформации.

Кроме того, в [44] предлагается зависимость проницаемости k от параметра поврежденности D в виде:

$$k(D) = k_0 + k_1^i(D)I - k_2^i(D)I,$$

где k_0 — проницаемость неповрежденной среды, а k_1 и k_2 — функции вида:

$$k_1^i = \frac{k_{\max} - k_o^i}{1 + \exp[-\nu_1 (D^i - D_1)]}, \quad k_2^i = \frac{k_{\max} - k_f}{1 + \exp[-\nu_2 (D^i - D_2)]}.$$

В этом случае графики зависимостей повреждаемости и проницаемости приведены на рисунке 5.

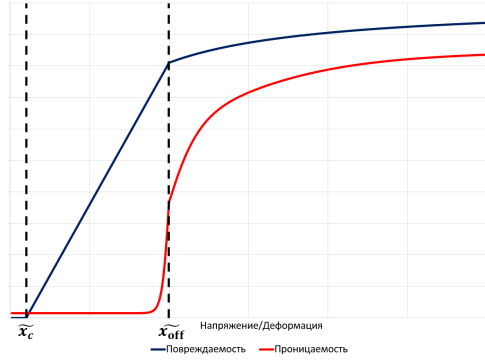


Рис. 5. Зависимости параметра повреждаемости и проницаемости от напряжения/деформации, предложенные в работе [44].

Для определения параметров k_{\max} , k_0 , k_f , ν_1 , ν_2 , D_1 , D_2 авторы провели анализ результатов лабораторных исследований, описанных в [47–50]. В данных исследованиях производилось измерение деформации и проницаемости горных пород в зависимости от нагрузки (рисунок 6). Полученные значения параметров корреляции для повреждаемости для различных вариантов критериев приведены в таблице 3. Параметры для проницаемости равны соответственно $k_0 = 10^{-16} \text{ м}^2$, $k_{\max} = 5 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$, $k_f = 4 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$.

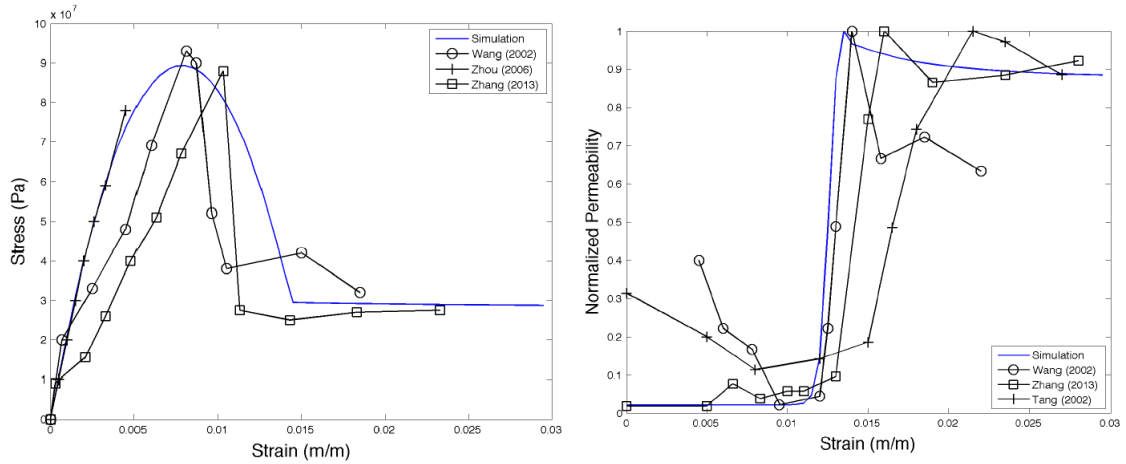


Рис. 6. Результат аппроксимации лабораторных исследований модельной кривой в [44] для напряжения и проницаемости.

В работе [51] параметр повреждаемости измеряется методом акустической эмиссии при одноосном нагружении образца гранита. В результате, авторами была получена следующая зависимость параметра D от деформации ε :

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon \leq \varepsilon_a; \\ c_1 \left(\exp \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_a}{c_2} - 1 \right), & \text{если } \varepsilon_a < \varepsilon \leq \varepsilon_b; \\ c_1 \left(\exp \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_a}{c_2} - 1 \right) \frac{\varepsilon_c - \varepsilon}{\varepsilon_c - \varepsilon_b} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_b}{\varepsilon_c - \varepsilon_b}, & \text{если } \varepsilon_b \leq \varepsilon < \varepsilon_c, \end{cases}$$

Таблица 3. Параметры материалов, приведенные в работе [44]

Параметр	Энерг. критерий	Формула Мазарса	Макс. гл. напр.	Кр. Друкера-Прагера
\tilde{x}_c	0.0002	0.0002	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
\tilde{x}_{off}	0.015	0.003	$1.5 \cdot 10^8$	$3.3 \cdot 10^7$
$\tilde{\nu}_1$	50	50	50	50
$\tilde{\nu}_2$	50	50	50	50
\tilde{D}_1	0.81	0.81	0.65	0.6
\tilde{D}_2	0.9	0.9	0.72	0.72

где c_1, c_2 — параметры образца, ε_a — значение деформации в конце фазы сжатия, ε_b — остаточная деформация, ε_c — деформация при разрушении.

В [52] процесс накопления повреждений рассматривается как увеличение размеров микротрещин и микродефектов в материале. Рассмотрим элементарный объем среды, который в начальный момент содержит случайно распределенные трещины, каждая из которых ориентирована с нормалью \mathbf{n} . В этом случае тензор повреждаемости рассчитывается по следующей формуле:

$$\mathbf{D} = \sum_k \left(\frac{l^3 - l_0^3}{b^3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right)_k = \sum_k \left((r^3 - r_0^3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right)_k,$$

где l_0 — средний радиус начальных микротрещин, b — характерное расстояние между трещинами в начальный момент времени.

Такой способ описания повреждаемости предполагает, что закон развития разрушения будет напрямую зависеть от скорости роста микротрещин. Для связи размеров микротрещин с внешней нагрузкой в статье используется следующее уравнение:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, r) = \sqrt{r} [\sigma_n + f(r) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^d \cdot \mathbf{n}] - c_r = 0,$$

где c_r — прочность материала, $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ — нормальное напряжение, приложенное к трещине, а тензор второго ранга $\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - (\sigma_{kk}/3) \mathbf{I}$ — девиаторная часть тензора напряжений. Функция $f(r)$ имеет вид:

$$f(r) = t \left[1 - \frac{(1-r)^2}{r_0(r_0-1)} \right],$$

где t — параметр модели.

В работе [53] предлагается следующее кинетическое уравнение:

$$D(t) = 1 - \frac{r(0)}{\tau(t)} \exp \left[A \left(1 - \frac{r(t)}{r(0)} \right) \right],$$

где τ — некоторая функция от тензора деформаций или тензора напряжений неповрежденного материала (эквивалентная деформация), r — пороговое значение поврежденно-

Таблица 4. Параметры материалов, полученные в работе [54]

Напряжение, МПа	A	B	C
100	0.010	0	0
120	0.015	0	0
130	0.018	0	0
140	0.020	0	0
145	0.021	0	0
150	0.028	$3.76 \cdot 10^{-9}$	0.314

сти, которое в начальный момент времени является параметром материала, а в момент времени t определяется по формуле:

$$r(t) = \max\{r(0), \max \tau(s)\}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Для образца бетона по результатам испытаний на одноосное сжатие были получены следующие значения коэффициентов: $A = 1500$, $r(0) = 0.01$.

В работе [54] представлены результаты лабораторных экспериментов по определению зависимости повреждаемости от деформаций при постоянной трехосной нагрузке для образца песчаника. Лабораторные данные были аппроксимированы кривой, основанной на реологической модели Бюргерса:

$$D = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{\text{eq}})^A}, & \text{если } \varepsilon_{\text{eq}} < \varepsilon_0; \\ 1 - \exp\left[-B(\varepsilon_{\text{eq}}^2 - \varepsilon_{\text{thr}}^2)^{1/C}\right] + \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon_{\text{thr}})^A}\right], & \text{если } \varepsilon_{\text{eq}} \geq \varepsilon_0, \end{cases}$$

где A, B, C — параметры материала, ε_{thr} — пороговая величина деформаций (полученное значение — $8.38 \cdot 10^{-3}$), ε_{eq} — эквивалентная деформация, определяемая по формуле:

$$\varepsilon_{\text{eq}} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2},$$

где ε_i — главные значения тензора деформаций.

Эксперимент проводился в диапазоне напряжений 100 – 150 МПа. Значения коэффициентов приведены в таблице 4.

В работе [48] представлены зависимости параметра деформации и проницаемости от деформации и напряжений, полученные при сжатии и растяжении образца песчаника.

Кинетический закон для повреждаемости в условиях растяжения имеет вид:

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon_0 < \varepsilon; \\ 1 - \frac{f_{\text{тр}}}{E_0 \varepsilon}, & \text{если } \varepsilon_{\text{ту}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ 1, & \text{если } \varepsilon < \varepsilon_{\text{ту}}, \end{cases}$$

где $f_{\text{тр}}$ — остаточное растягивающее напряжение.

Аналогично для сжимающих напряжений $f_{\text{ср}}$:

$$D = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon < \varepsilon_{\text{с0}}; \\ 1 - \frac{f_{\text{ср}}}{E_0 \varepsilon}, & \text{если } \varepsilon_{\text{с0}} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Для проницаемости в данной работе приведена следующая зависимость:

$$k = \begin{cases} k_0 \exp[-\beta(\sigma - \alpha p)], & \text{если } D = 0; \\ \xi k_0 \exp[-\beta(\sigma - \alpha p)], & \text{если } D > 0. \end{cases}$$

В результате проведенного эксперимента авторы приводят следующие значения для параметров: $\xi = 20$, $\beta = 0.05$, $f_{\text{ср}} = 220$ МПа, $f_{\text{тр}} = 22$ МПа.

Зависимость проницаемости от параметра поврежденности на основе статистических подходов. В ряде работ рассматривается проблема определения зависимости между проницаемостью среды и параметром повреждаемости с использованием статистических подходов.

В работе [55] процесс разрушения рассматривается с точки зрения микроскопического и макроскопического подходов. Макроскопический подход используется для определения кинетического закона для повреждаемости как функция напряженно-деформированного состояния:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \lambda \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}}, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{\varepsilon_{ij} + |\varepsilon_{ij}|}{2},$$

где λ — параметр модели.

В соответствии с микроскопическим подходом предполагалось, что микротрещины, появляющиеся в результате разрушения материала, распределены с некоторой плотностью ρ так, что:

$$\mathbf{D} = \rho \omega \mathbf{F},$$

где ω — средний объем трещин в элементарном объеме среды, \mathbf{F} — тензор второго ранга ориентации повреждаемости, зависящий от параметров анизотропии среды и направления нагрузки.

Для связи проницаемости и повреждаемости использовалась следующая зависимость:

$$\text{tr}(\mathbf{K}) = f(\eta) = A\eta^B,$$

где $\eta = \text{tr}(\mathbf{D})$.

В статье [56] представлен ещё один подход к описанию зависимости порового объема и проницаемости от повреждаемости. В модели рассматривается элементарный объем, содержащий естественные поры и трещины, возникающие в результате разрушения материала. Предполагается, что естественные поры и трещины имеют вид цилиндров с равными длинами, но различными радиусами, причем радиусы имеют нормальное распределение. Плотность вероятности распределения радиусов поровых каналов имеет вид:

$$p_p(r) = \begin{cases} \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(r-m)^2}{2s^2}\right), & \text{если } r_{\min}^p \leq r \leq r_{\max}^p; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где m и s — среднее и среднеквадратичное отклонение распределения радиусов, а r_{\min}^p и r_{\max}^p — минимальный и максимальный радиусы пор.

Функция распределения радиусов трещин имеет вид:

$$p_c(r) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_c} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_c}\right), & \text{если } r_{\min}^c \leq r \leq r_{\max}^c; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где λ_c — среднеквадратичное отклонение.

Таким образом, объем, который занимают поры или трещины в элементарном объеме, определяется по формуле:

$$V_{p,c} = \pi N_{p,c} \int_{r_{\min}^{p,c}}^{r_{\max}^{p,c}} p_{p,c}(r) r^2 dr,$$

где $N_{p,c}$ — количество пор или трещин соответственно.

С другой стороны, изменение объема определяется через тензор деформаций:

$$\Delta V_{c,p} = -\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_{c,p},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{c,p}$ — тензор упругих деформаций и деформаций, вызванных разрушением.

Соответственно, по известным в каждый момент времени деформациям определяются объемы V_p и V_c , после чего восстанавливаются параметры соответствующей функции распределения. Данные параметры далее используются для расчета проницаемости.

В статье предлагается, что проницаемость зависит от пористости по следующей фор-

муле:

$$k = \frac{\gamma}{8\mu} \Phi \left[\int_0^\infty f(r) dr \right]^{-1} \int_0^\infty f(r) r^2 dr, \quad f(r) = (N_p p_p(r) + N_c p_c(r)) \pi r^2,$$

где Φ — суммарная пористость.

Таким образом, данный подход позволяет пересчитывать проницаемость в соответствии с текущим напряженно-деформируемым состоянием. При этом модель не зависит от выбранного кинетического закона для параметра повреждаемости.

8 Заключение

В настоящей работе представлена математическая модель для описания фильтрации в термопоупругой среде с учетом разрушения. Система уравнений состоит из законов сохранения массы, импульса и энергии, при этом в законе сохранения энергии учитывается слагаемое, отвечающее за потери энергии на разрушение породы. Для замыкания данной системы уравнений используются определяющие соотношения, полученные с использованием процедуры Колмана-Нолла. Определяющие соотношения удовлетворяют основным принципам, в том числе принципу термодинамической согласованности за счет выполнения второго начала термодинамики.

Список литературы

- [1] Работнов Ю. Н. Механизм длительного разрушения. // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: АН СССР, 1959. - С. 5-7.
- [2] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – №. 8. – С. 26-31.
- [3] Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage // Creep in structures. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. – P. 422-444.
- [4] Krajcinovic D., Lemaitre J. (ed.). Continuum damage mechanics: theory and applications. – New York : Springer-Verlag, 1987. – P. 294.
- [5] Кондауров В. И., Фортов В. Е. Основы термомеханики конденсированной среды. – М.: МФТИ, 2002. - 336 с.
- [6] Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation // Journal of Applied Physics, 1941. V. 12, pp. 155–164.
- [7] Coussy O. Poromechanics. – John Wiley and Sons, 2004. - 312. p.
- [8] Кондауров В. И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. – М. : МФТИ, 2007. - 309 с.
- [9] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.:Наука, 1974. - 640 с.

- [10] Базаров И. П., Геворкян Э. В., Николаев П. Н. Термодинамика и статистическая физика //М.: МГУ. – 1986. – 240 с.
- [11] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media //Archive for rational Mechanics and Analysis. – 1958. – V. 2. – No. 1. – P. 197-226.
- [12] Трудделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. - 592 с.
- [13] Coleman B. D., Noll W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity //Archive for rational mechanics and analysis. – 1963. – V. 13. – No. 1. – P. 167-178.
- [14] Hütter G. An extended Coleman–Noll procedure for generalized continuum theories //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2016. – V. 28. – No. 6. – P. 1935-1941.
- [15] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories //Principles of classical mechanics and field theory/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1960. – P. 226-858.
- [16] Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture //Journal of engineering materials and technology. – 1985. – V. 107. – No. 1. – P. 83-89.
- [17] Lemaitre J., Desmorat R. Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures. – Springer Science and Business Media, 2005. - 380 p.
- [18] Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. - 312 с.
- [19] Griffith A. A. VI. The phenomena of rupture and flow in solids //Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character. – 1921. – V. 221. – No. 582-593. – P. 163-198.
- [20] Hult J. Damage-induced tensile instability // Structural mechanics in reactor technology. – 1975.
- [21] Ladeveze P. On an anisotropic damage theory //Proc. CNRS Int. Coll. – 1983. – V. 351. – P. 355-363.
- [22] Lemaitre J., Chaboche J. L. Phenomenological approach of damage rupture //Journal de Mecanique Appliquee. – 1978. – V. 2. – No. 3. – P. 317-365.
- [23] Krajcinovic D., Fonseka G. U. The continuous damage theory of brittle materials, part 1: general theory //Journal of applied Mechanics. – 1981. – V. 48. – No. 4. – P. 809-815.
- [24] Leckie F. A., Onat E. T. Tensorial nature of damage measuring internal variables //Physical non-linearities in structural analysis. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. – P. 140-155.
- [25] Chow C. L., Wang J. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics //International Journal of Fracture. – 1987. – V. 33. – No. 1. – P. 3-16.
- [26] Murakami S. Continuum damage mechanics: a continuum mechanics approach to the analysis of damage and fracture. – Springer Science and Business Media, 2012. – V. 185.

- [27] Вакуленко А. А., Качанов М. Л. Континуальная теория среды с трещинами //Изв. АН СССР. МТТ. – 1971. – №. 4. – С. 159-166.
- [28] Ken-Ichi K. Distribution of directional data and fabric tensors //International Journal of Engineering Science. – 1984. – V. 22. – No. 2. – P. 149-164.
- [29] Onat E. T., Leckie F. A. Representation of mechanical behavior in the presence of changing internal structure //Journal of Applied Mechanics. – 1988. – V. 55. – No. 1. – P. 1-10.
- [30] Lubarda V. A., Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution //International Journal of Solids and Structures. – 1993. – V. 30. – No. 20. – P. 2859-2877.
- [31] Krajcinovic D. Damage mechanics. – Elsevier, 1996. – V. 41.
- [32] Голуб В. П., Романов А. В. К задаче построения нелинейных моделей накопления повреждений при ползучести //Проблемы прочности. – 1990. – №. 6. – С. 9.
- [33] Leckie F.A. and Hayhurst D.R. Constitutive equations for creep rupture // Acta Metall. – 25. – 1977. – P. 1059-1070.
- [34] Silberschmidt V. V., Silberschmidt V. G. Stochastic dynamics of damage evolution in brittle rocks //Geologische Rundschau. – 1996. – V. 85. – No. 1. – P. 103-109.
- [35] Cheng H. H., Dusseault M. B. A continuum damage mechanics model for geomaterials //International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2004. – V. 41. – No. 3. – P. 375.
- [36] Hamiel Y. et al. A viscoelastic damage model with applications to stable and unstable fracturing //Geophysical Journal International. – 2004. – V. 159. – No. 3. – P. 1155-1165.
- [37] Wang Z., Li Y., Wang J. G. A method for evaluating dynamic tensile damage of rock //Engineering fracture mechanics. – 2008. – V. 75. – No. 10. – P. 2812-2825.
- [38] Mishnaevsky Jr L. L., Schmauder S. Damage evolution and localization in heterogeneous materials under dynamical loading: stochastic modelling //Computational mechanics. – 1997. – V. 20. – No. 1-2. – P. 89-94.
- [39] Извеков О. Я., Кондауров В. И. Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом //Физика Земли. – 2009. – №. 4. – С. 31-42.
- [40] Mazars J., Pijaudier-Cabot G. Continuum damage theory—application to concrete //Journal of Engineering Mechanics. – 1989. – V. 115. – No. 2. – P. 345-365.
- [41] Peerlings R. H. J. et al. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture //Mechanics of Cohesive-frictional Materials. – 1998. – V. 3. – No. 4. – P. 323-342.
- [42] Pearce C. J., Nielsen C. V., Bicanic N. Gradient enhanced thermo-mechanical damage model for concrete at high temperatures including transient thermal creep //International journal for numerical and analytical methods in geomechanics. - 2004. - V. 28. - No. 7-8. - P. 715-735.

- [43] Bobiński J., Tejchman J. Simulations of fracture in concrete elements using continuous and discontinuous models //Mechanics and Control. – 2011. – V. 30. – No. 4.
- [44] Pogacnik J., O’Sullivan M., O’Sullivan J. A Damage Mechanics Approach to Modeling Permeability Enhancement in Thermo-Hydro-Mechanical Simulations //Proceedings. – 2014. – P. 24-26.
- [45] Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design //Quarterly of applied mathematics. – 1952. – V. 10. – No. 2. – P. 157-165.
- [46] Crisfield M. A. et al. Nonlinear finite element analysis of solids and structures. – John Wiley and Sons, 2012.
- [47] Wang J. A., Park H. D. Fluid permeability of sedimentary rocks in a complete stress–strain process //Engineering geology. – 2002. – V. 63. – No. 3-4. – P. 291-300.
- [48] Tang C. A. et al. Coupled analysis of flow, stress and damage (FSD) in rock failure //International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2002. – V. 39. – No. 4. – P. 477-489.
- [49] Zhou J. J., Shao J. F., Xu W. Y. Coupled modeling of damage growth and permeability variation in brittle rocks //Mechanics Research Communications. – 2006. – V. 33. – No. 4. – P. 450-459.
- [50] Zhang R. et al. The relationship between the deformation mechanism and permeability on brittle rock //Natural hazards. – 2013. – V. 66. – No. 2. – P. 1179-1187.
- [51] Ji M. et al. Damage evolution law based on acoustic emission and Weibull distribution of granite under uniaxial stress //Acta Geodynamica et Geomaterialia. – 2014. – V. 11. – No. 3. – P. 269-278.
- [52] Shao J. F., Rudnicki J. W. A microcrack-based continuous damage model for brittle geomaterials //Mechanics of Materials. – 2000. – V. 32. – No. 10. – P. 607-619.
- [53] Oliver J. et al. Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete SCI-C 1990, Second Int //Conf. on Computer Aided Design of Concrete Structure, Zell am See, Austria. – 1990. – P. 945-957.
- [54] Wang W., Lv J., Wang H. C. A creep-damage constitutive model for sandstone //Applied Mechanics and Materials. – Trans Tech Publications, 2012. – V. 170. – P. 289-294.
- [55] Maleki K., Pouya A. Numerical simulation of damage–Permeability relationship in brittle geomaterials //Computers and Geotechnics. – 2010. – V. 37. – No. 5. – P. 619-628.
- [56] Arson C., Pereira J. M. Influence of damage on pore size distribution and permeability of rocks //International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2013. – V. 37. – No. 8. – P. 810-831.