Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 =$

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$.

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises)

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r}$

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$,

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

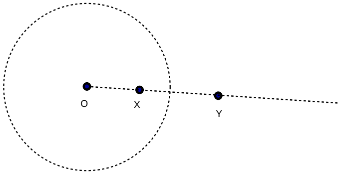
Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet,

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

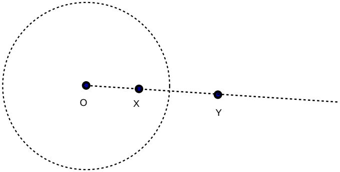
Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \ (\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard})$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} \ : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.

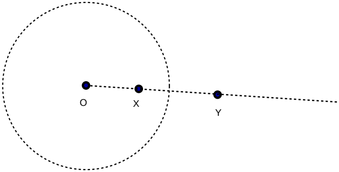


Koordinatendarstellung:

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.

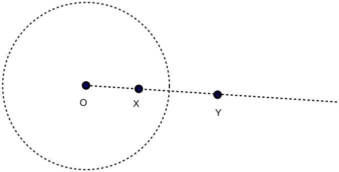


Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$,

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.

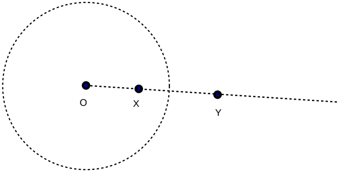


Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$.

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.

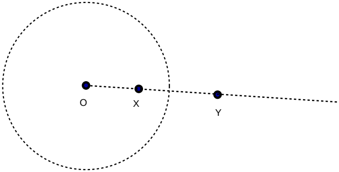


Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY}$

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.

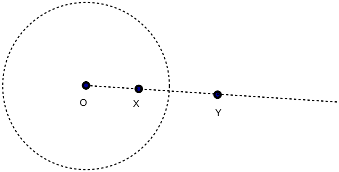


Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0}$

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.

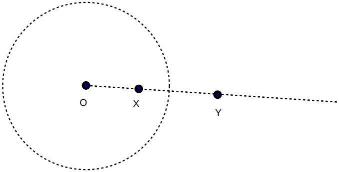


Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.

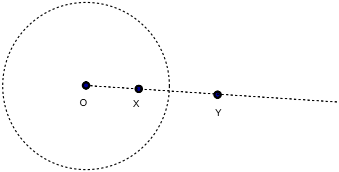


Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



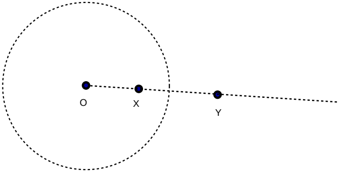
Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

Bemerkung

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



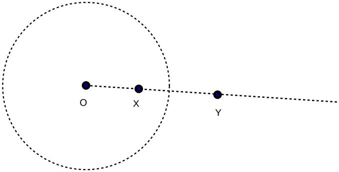
Koordinatendarstellung: Für $O = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

Bemerkung

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



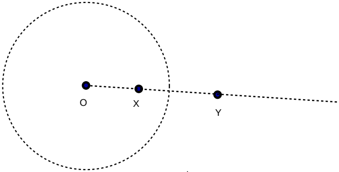
Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

Bemerkung

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \ (\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard})$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



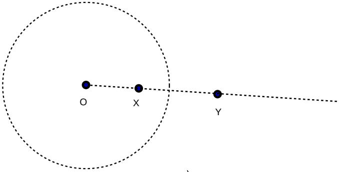
Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

Bemerkung $|\overrightarrow{OY}| =$

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



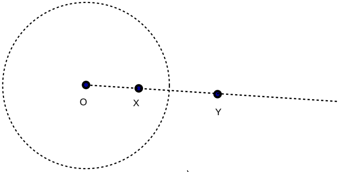
Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

Bemerkung $|\overrightarrow{OY}| = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2}|\overrightarrow{OX}|$

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



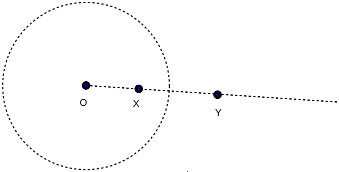
Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\binom{x - x_0}{y - y_0}$

Bemerkung $|\overrightarrow{OY}| = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2}|\overrightarrow{OX}| = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|}$.

Neues Thema: Inversion am Kreis (Kreisspiegelung)

Wir arbeiten in $E_2 = \left(\mathbb{R}^2, (\ ,\ )_{standard}\right)$.

Def. 34 Betrachte einen Kreis um O vom Radius $r > 0$. Inversion (bzgl. des Kreises) ist eine Abbildung $I_{O,r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, die Punkt X auf den Punkt Y abbildet, s.d. $\overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX}$.



Koordinatendarstellung: Für $O = \binom{x_0}{y_0}$, $X = \binom{x}{y}$. Dann ist $Y = O + \overrightarrow{OY} = \binom{x_0}{y_0} + \frac{r^2}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \binom{x - x_0}{y - y_0}$

Bemerkung $|\overrightarrow{OY}| = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} |\overrightarrow{OX}| = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|}$. Also, $|\overrightarrow{OY}| \cdot |\overrightarrow{OX}| = r^2$

Geometrische Beschreibung von der Lage von Y:

Geometrische Beschreibung von der Lage von Y:

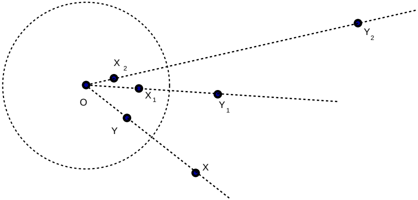
- O, X, Y liegen auf einem Strahl mit Anfangspunkt im O.

Geometrische Beschreibung von der Lage von Y:

- O, X, Y liegen auf einem Strahl mit Anfangspunkt im O.
- $|\overrightarrow{OY}| \cdot |\overrightarrow{OX}| = r^2$

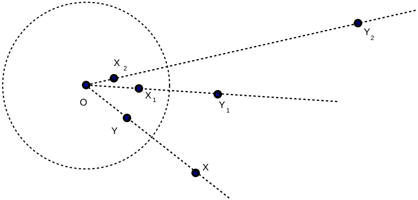
Geometrische Beschreibung von der Lage von Y:

- O, X, Y liegen auf einem Strahl mit Anfangspunkt im O.
- $|\overrightarrow{OY}| \cdot |\overrightarrow{OX}| = r^2$



Geometrische Beschreibung von der Lage von Y:

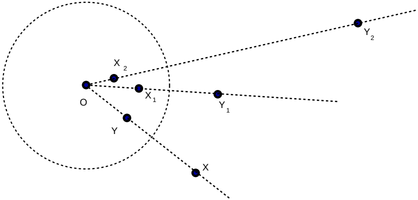
- O, X, Y liegen auf einem Strahl mit Anfangspunkt im O.
- $|\overrightarrow{OY}| \cdot |\overrightarrow{OX}| = r^2$



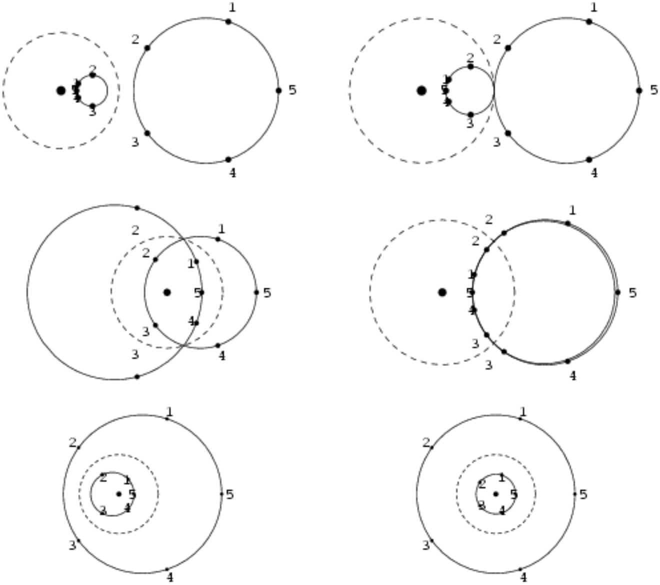
Bemerkung

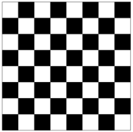
Geometrische Beschreibung von der Lage von Y:

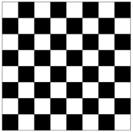
- O, X, Y liegen auf einem Strahl mit Anfangspunkt im O.
- $|\overrightarrow{OY}| \cdot |\overrightarrow{OX}| = r^2$

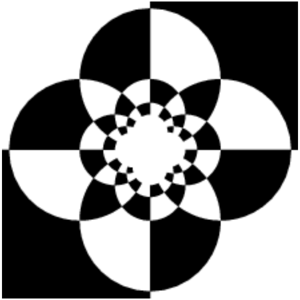


Bemerkung Inversion ist eine Bijektion (als Abbildung vom $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ auf sich selbst.)









Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien:

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie,

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) =$

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist,

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$,

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$.

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen,

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:

$I(z) =$

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}\left(F(X)\right) = \; F\left(I_{O,r}(X)\right)$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \; \frac{z}{|z|^2}$

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \frac{z}{|z|^2} := \frac{1}{\bar{z}}$

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \frac{z}{|z|^2} := \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ die komplexe Konjugation ist

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}\left(F(X)\right) = F\left(I_{O,r}(X)\right)$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \frac{z}{|z|^2} := \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ die komplexe Konjugation ist (da

$\frac{1}{z}$

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \frac{z}{|z|^2} := \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ die komplexe Konjugation ist (da
$\frac{1}{z} \overset{\text{Ana I}}{=}$

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \frac{z}{|z|^2} := \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ die komplexe Konjugation ist (da $\frac{1}{z} \overset{\text{Ana I}}{=} \frac{x-i\cdot y}{x^2+y^2}$

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \frac{z}{|z|^2} := \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ die komplexe Konjugation ist (da $\frac{1}{z} \overset{\text{Ana I}}{=} \frac{x-i\cdot y}{x^2+y^2}$ und deswegen $\frac{1}{\bar{z}} =$

Einfachste Eigenschaften und komplexe Zahlen

Einfachste Eigenschaften:

1. Liegt X auf dem Kreis um O vom radius r, so ist $I_{O,r}(X) = X$.
2. I ist eine Involution: $I \circ I = Id$.
3. I bildet innere Punkte des Kreises auf äussere, und umgekehrt.
4. I kommutiert mit Isometrien: Ist $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, so ist $I_{F(O),r}(F(X)) = F(I_{O,r}(X))$

Falls $O = \binom{0}{0}$ ist, und $r = 1$, so ist die Inversion gegeben durch $I\binom{x}{y} = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$. Falls wir $z = x + i \cdot y$ setzen, wird die Inversion wie folgt gegeben:
$I(z) = \frac{z}{|z|^2} := \frac{1}{\bar{z}}$, wobei $\bar{z}$ die komplexe Konjugation ist (da $\frac{1}{z} \overset{\text{Ana I}}{=} \frac{x-i\cdot y}{x^2+y^2}$ und deswegen $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{x+i\cdot y}{x^2+y^2}$.)

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \quad \infty$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$.

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann

definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y & \\ & \\ & \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \\ \\ \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \\ \\ \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \\ \\ \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \ \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \ \text{ für } X \neq O, \infty \\ \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} & \text{für } X \neq O, \infty \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann

definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} & \text{für } X \neq O, \infty \\ & \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann

definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \text{ für } X \neq O, \infty \\ \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \ \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} & \text{für } X \neq O, \infty \\ & \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann

definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \ \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \ \text{ für } X \neq O, \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \text{ für } X \neq O, \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \\ O \text{ falls } X = \infty \end{cases}$$

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \ \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \ \text{ für } X \neq O, \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \\ O \text{ falls } X = \infty \end{cases}$$

Inversion ist eine bijektive Abbildung von verallgemeinerten Ebene auf sich selbst.

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \text{ für } X \neq O, \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \\ O \text{ falls } X = \infty \end{cases}$$

Inversion ist eine bijektive Abbildung von verallgemeinerten Ebene auf sich selbst.

Frage

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \text{ für } X \neq O,\ \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \\ O \text{ falls } X = \infty \end{cases}$$

Inversion ist eine bijektive Abbildung von verallgemeinerten Ebene auf sich selbst.

Frage Warum die Bezeichnung ∞?

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \text{ für } X \neq O, \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \\ O \text{ falls } X = \infty \end{cases}$$

Inversion ist eine bijektive Abbildung von verallgemeinerten Ebene auf sich selbst.

Frage Warum die Bezeichnung ∞?

Antwort:

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \text{ für } X \neq O, \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \\ O \text{ falls } X = \infty \end{cases}$$

Inversion ist eine bijektive Abbildung von verallgemeinerten Ebene auf sich selbst.

Frage Warum die Bezeichnung ∞?

Antwort: Wir brauchen einen künstlichen Punkt, um $I(O)$ zu definieren.

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \ \text{s.d.} \ \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} \ \text{für} \ X \neq O, \infty \\ \infty \ \text{falls} \ X = O \\ O \ \text{falls} \ X = \infty \end{cases}$$

Inversion ist eine bijektive Abbildung von verallgemeinerten Ebene auf sich selbst.

Frage Warum die Bezeichnung ∞?

Antwort: Wir brauchen einen künstlichen Punkt, um $I(O)$ zu definieren. Je naher ist X zu O, je weiter ist $I(X)$ von O.

Inversion als Bijektion von $\mathbb{R}^2 \cup \infty$

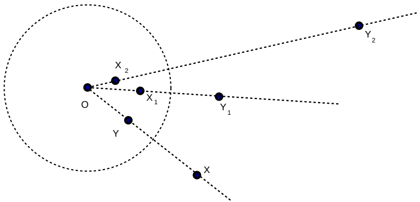
Betrachte verallgemeinerte Ebene $\bar{\mathbb{R}}^2 := \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\infty}_{\text{ein formaler Punkt}}$. Dann definiere die Inversion $I : \bar{\mathbb{R}}^2 \to \bar{\mathbb{R}}^2$ wie folgt:

$$I(X) = \begin{cases} Y \text{ s.d. } \overrightarrow{OY} = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|^2} \cdot \overrightarrow{OX} & \text{für } X \neq O,\ \infty \\ \infty \text{ falls } X = O \\ O \text{ falls } X = \infty \end{cases}$$

Inversion ist eine bijektive Abbildung von verallgemeinerten Ebene auf sich selbst.

Frage Warum die Bezeichnung ∞?

Antwort: Wir brauchen einen künstlichen Punkt, um $I(O)$ zu definieren. Je naher ist X zu O, je weiter ist $I(X)$ von O. (Weil $|\overrightarrow{OY}| = \frac{r^2}{|\overrightarrow{OX}|}$). Man kann $I(O)$ als unendlichen Punkt vorstellen, daher die Bezeichnung.



Def. 35

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0),

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$,

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab.*

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden,*

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten,*

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

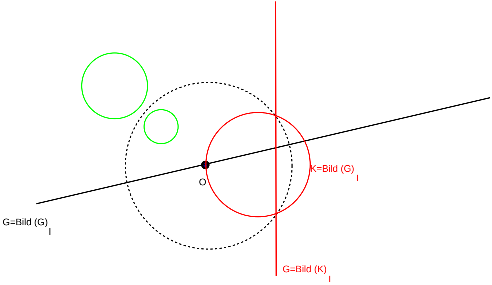
Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*

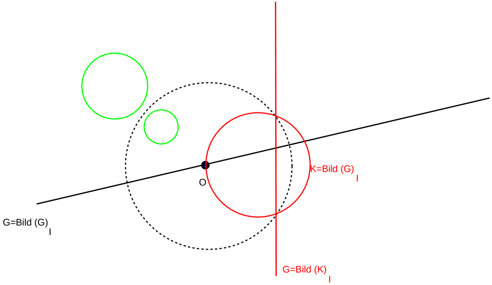


Beweis

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*

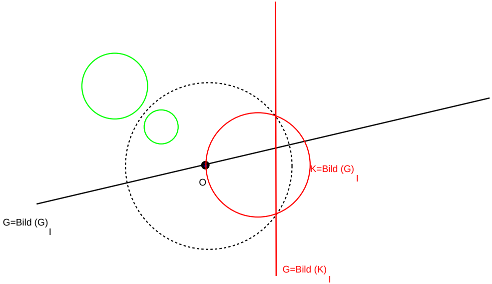


Beweis Betrachten eine Inversion $I_{O,r}$

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*

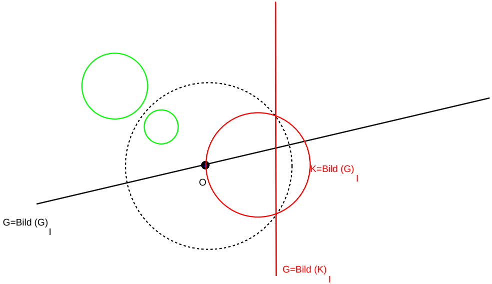


Beweis Betrachten eine Inversion $I_{O,r}$ und einen Kreis K.

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*

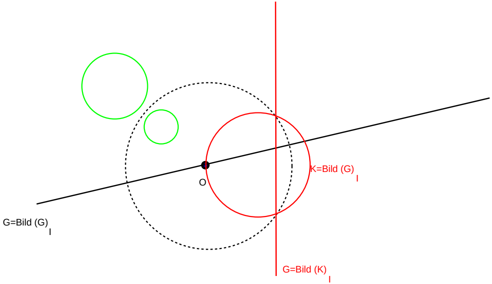


Beweis Betrachten eine Inversion $I_{O,r}$ und einen Kreis K. Da Inversion mit Isometrien kommutiert,

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*

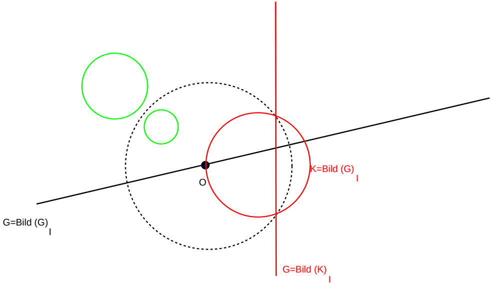


Beweis Betrachten eine Inversion $I_{O,r}$ und einen Kreis K. Da Inversion mit Isometrien kommutiert, es genügend die Aussage des Lemmas für $I_{F(O),r}$ und den Kreis $Bild_F(K)$ beweisen,

Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*

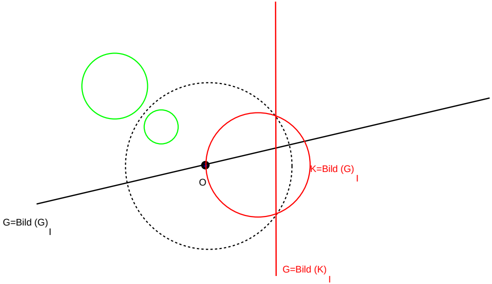


Beweis Betrachten eine Inversion $I_{O,r}$ und einen Kreis K. Da Inversion mit Isometrien kommutiert, es genügend die Aussage des Lemmas für $I_{F(O),r}$ und den Kreis $Bild_F(K)$ beweisen, wobei f eine Isometrie ist.

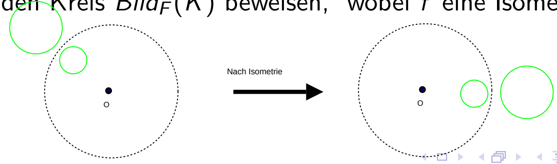
Def. 35 Veralgemeinerte Kreis ist ein Kreis (vom Radius > 0), oder die Vereinigung $\underbrace{\mathcal{G} \cup \infty}_{\text{verallgemeinerte Gerade}}$, wobei $\mathcal{G}$ eine Gerade ist.

Lemma 19 *Inversion bildet verallgemeinerte Kreise auf verallgemeinerte Kreise ab. Ferner gilt:*

- *Inversion $I_{O,r}$ überführt alle verallgemeinerte Geraden, die O enthalten, in sich selbst,*
- *und andere verallgemeinerte Geraden in Kreise, die O enthalten.*
- *Inversion überführt die Kreise, die O enthalten, in verallgemeinerte Geraden,*
- *und andere Kreise in Kreise.*



Beweis Betrachten eine Inversion $I_{O,r}$ und einen Kreis K. Da Inversion mit Isometrien kommutiert, es genügend die Aussage des Lemmas für $I_{F(O),r}$ und den Kreis $Bild_F(K)$ beweisen, wobei f eine Isometrie ist.



Also, sei $O = \binom{0}{0}$

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} =$

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.
Da $I \circ I = Id$,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung

$\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 +$

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung

$$\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0.$$

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2-x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2-x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}$

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2-x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2-x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1}\cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.
($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2 + y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2 + y^2)(R^2 - x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2 x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.
($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2 + y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2 + y^2)(R^2 - x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.

($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)

Ist $R^2 = x_c^2$,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2 - x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2 x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2 \end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.

($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)

Ist $R^2 = x_c^2$, was bedeutet,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

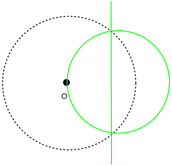
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2-x_c^2)}_{(x\ \ y)\begin{pmatrix}R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1}\cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix}R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.

($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)

Ist $R^2 = x_c^2$, was bedeutet, das K durch O geht,



Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

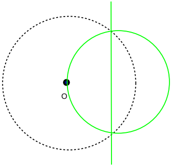
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2-x_c^2)}_{(x\ \ y)\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2 \end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.

($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)

Ist $R^2 = x_c^2$, was bedeutet, das K durch O geht,

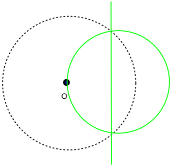


so ist $(*) \iff 2x_c \cdot x = r^2$,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung
$\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2-x_c^2)}_{(x\ \ y)\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2 \end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.
($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)
Ist $R^2 = x_c^2$, was bedeutet, das K durch O geht,



so ist $(*) \iff 2x_c \cdot x = r^2$, und dies ist die Gleichung der Gerade.

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

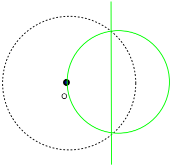
Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung $\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2-x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1}\cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2-x_c^2 & \\ & R^2-x_c^2\end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.

($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)

Ist $R^2 = x_c^2$, was bedeutet, das K durch O geht,



so ist $(*) \iff 2x_c \cdot x = r^2$, und dies ist die Gleichung der Gerade.

Beweis für die Geraden,

Also, sei $O = \binom{0}{0}$ (und deswegen ist $I\binom{x}{y} = \frac{r^2}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$,) und der untersuchende Kreis sei $K := \{\binom{x}{y} s.d. (x - x_c)^2 + y^2 - R^2 = 0\}$.

Da $I \circ I = Id$, besteht $Bild_I(K)$ aus allen Punkten, die auf Punkte von K abgebildet werden, also aus den allen Lösungen der Gleichung

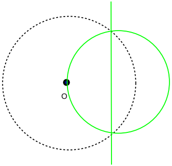
$\left(\frac{r^2}{x^2+y^2}x - x_c\right)^2 + \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}y\right)^2 - R^2 = 0$. Multiplizieren mit $-(x^2+y^2)$ ergibt

$$\underbrace{(x^2+y^2)(R^2 - x_c^2)}_{(x\ y)\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2\end{pmatrix}\binom{x}{y}} + \underbrace{2r^2x_c}_{a_1} \cdot x = r^4 \qquad (*)$$

Ist $R^2 \neq x_c^2$, so hat $\begin{pmatrix} R^2 - x_c^2 & \\ & R^2 - x_c^2\end{pmatrix}$ zwei gleiche Eigenwerte, und ist $(*)$ die Gleichung eines Kreises.

($\varnothing$ und Punkt sind ausgeschlossen, weil K mehr als einen Punkt hat.)

Ist $R^2 = x_c^2$, was bedeutet, das K durch O geht,



so ist $(*) \iff 2x_c \cdot x = r^2$, und dies ist die Gleichung der Gerade.

Beweis für die Geraden, die durch O gehen ist ähnlich. $\square$

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$,

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung
$C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind,

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$.

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp.

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)}$

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$,

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve.

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B.

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} =$

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$,

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$,

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp.

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve.

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} =$

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \Bigg(\frac{\cos(t)}{\sqrt{\lambda}}$

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \Bigg(\frac{\cos(t)}{\sqrt{\lambda}}$

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$,

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$,

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$,

Glatte Kurven und deren Tangenten

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung,

Def 36 (Glatte ebene) Kurve ist das Bild einer Abbildung $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, d.h., $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ wobei C_1, C_2 stetig differenzierbar sind, und $(C_1')^2 + (C_2')^2 > 0$. Physikalisch kann man einer Kurve als die Bahn eines Teilchens verstehen.

Bsp. Strecke $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{x_0 + u \cdot t}{y_0 + v \cdot t}$, $t \in [\alpha, \beta]$, ist eine Kurve.

Bsp. Kreis ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung deren Bild der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Bsp. Ellipse ist eine Kurve. Z.B. $\binom{C_1(t)}{C_2(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{\mu}} \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist die Abbildung, deren Bild die Ellipse mit der Gleichung $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$ ist.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition:

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,)

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \longrightarrow t_0$.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

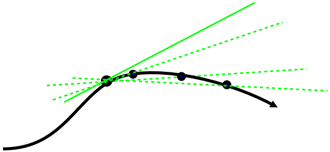
Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

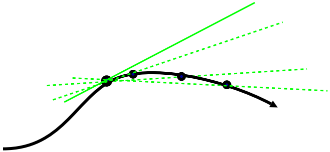
Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$,

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

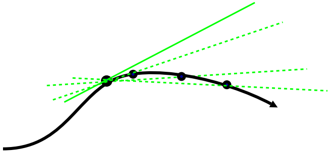
Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform).

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

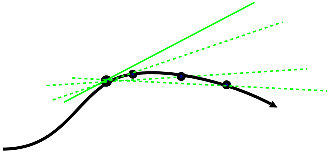
Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen,

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.

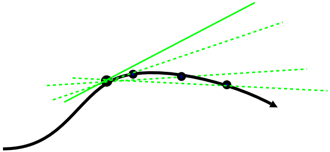


(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

$(**)$ $c > 0$.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



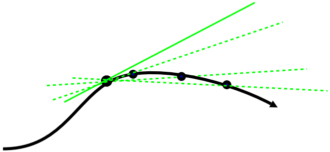
(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, $\left(C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)} \right)$ eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten ($=$Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



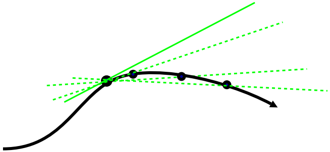
(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



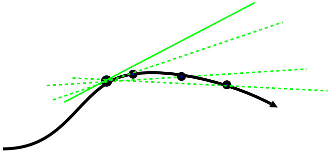
(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren,

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



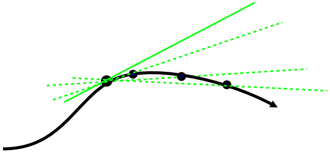
(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



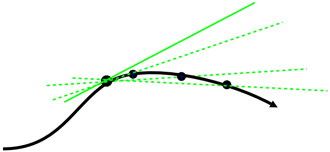
(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

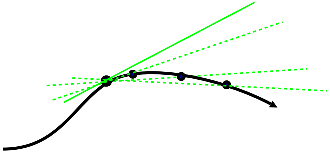
Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass
$(**)$ $c > 0$.
Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.

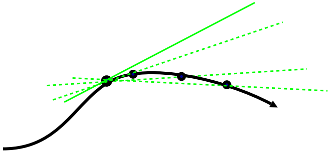


(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass
$(**)$ $c > 0$.
Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition:

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.

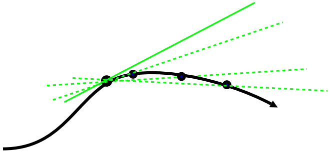


(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass
$(**)$ $c > 0$.
Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

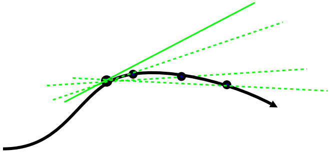
$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0 ist die Gerade $\left\{ C(t_0) + \binom{C_1'(t_0)}{C_2'(t_0)} s \right.$

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten ($=$Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.

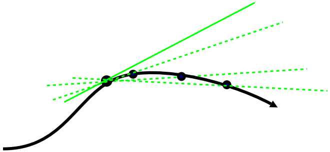


(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass
$(**)$ $c > 0$.
Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0 ist die Gerade $\left\{ C(t_0) + \binom{C_1'(t_0)}{C_2'(t_0)} s \right.$

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

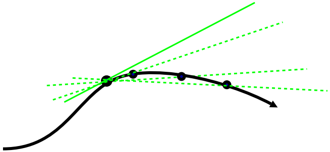
$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0 ist die Gerade $\left\{ C(t_0) + \binom{C_1'(t_0)}{C_2'(t_0)} s \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

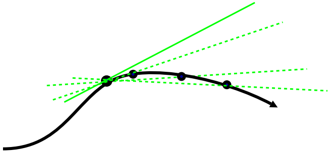
$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0 ist die Gerade $\left\{ C(t_0) + \binom{C_1'(t_0)}{C_2'(t_0)} s \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass

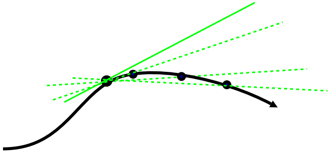
$(**)$ $c > 0$.

Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0 ist die Gerade $\left\{ C(t_0) + \binom{C_1'(t_0)}{C_2'(t_0)} s \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



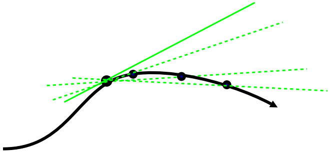
(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass
$(**)$ $c > 0$.
Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0 ist die Gerade $\left\{ C(t_0) + \binom{C_1'(t_0)}{C_2'(t_0)} s \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lemma 20

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



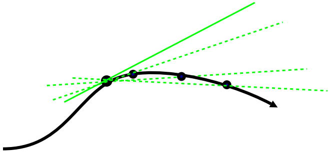
(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass
$(**)$ $c > 0$.
Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0 ist die Gerade $\left\{ C(t_0) + \binom{C_1'(t_0)}{C_2'(t_0)} s \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lemma 20 Die analytische und geometrische Definitionen stimmen überein.

Sei $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, ($C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$) eine Kurve. Was ist deren Tangente im Punkt $P = C(t_0)$?

Geometrische Definition: Nehme die folge von Sekanten (=Geraden die durch $C(t_0)$ und $C(t_i)$ gehen,) wobei $t_i \to t_0$. Dann heißt deren Grenzwert die Tangente.



(Jede Gerade ist gegeben durch die Gleichung der Form $ax + by + c = 0$, wobei $(*)$ $a^2 + b^2 = 1$ (Hessische Normalform). OBdA ist $c \neq 0$, also können wir die Gleichung so wählen, dass
$(**)$ $c > 0$.
Die Bedienungen $(*)$, $(**)$ bestimmen die Gleichung einer gegebenen Geraden eindeutig. Also, bekommen wir die Folgen a_i, b_i, c_i. Die Folgen konvergieren, sieh Beweis von Lemma 20. Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ die Grenzwerte. Dann wird die Gerade mit der Gleichung $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$ die Tangente.)

Analytische Definition: Die Tangente einer Kurve $C(t) = \binom{C_1(t)}{C_2(t)}$ in t_0 ist die Gerade $\left\{ C(t_0) + \binom{C_1'(t_0)}{C_2'(t_0)} s \text{ wobei } s \in \mathbb{R} \right\}$.

Lemma 20 Die analytische und geometrische Definitionen stimmen überein.

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$.

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:
$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:
$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0$$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0$$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0)$, $C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ {\color{blue}C_1(0) - C_1(t)} & {\color{green}C_2(0) - C_2(t)} \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ {\color{blue}C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t))} & {\color{green}C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t))} \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0$$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\underbrace{x\,(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - y\,\underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)}$$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x \underbrace{(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - y \underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}$$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x \underbrace{(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - y \underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}$$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$, wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x \underbrace{(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - y \underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}$$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0)$, $C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\underbrace{x\,(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - \underbrace{y\,(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\underbrace{x\,(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - \underbrace{y\,(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x \underbrace{(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - y \underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{OBdA ist Vorzeichen von} \\ c(t) \text{ konstant in der nähe} \\ \text{von } 0}}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c,

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$, wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x \underbrace{(C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest(t))}_{a(t)} - y \underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von 0}}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x \underbrace{(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - y \underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gleich Wert im $t = 0$, und ist $x \frac{C_2'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} - y \frac{C_1'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}}$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x \underbrace{(C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest(t))}_{a(t)} - y \underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von 0}}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gleich Wert im $t = 0$, und ist $x\frac{C_2'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} - y\frac{C_1'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) & C_2'(0) \end{pmatrix}$

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\underbrace{x\,(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - y\,\underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gleich Wert im $t = 0$, und ist $x \frac{C_2'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} - y \frac{C_1'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) & C_2'(0) \end{pmatrix}$

Also, die Richtungsvektor der Grenzwertgerade ist

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,
wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det\begin{pmatrix} C_1(0)-x & C_2(0)-y \\ C_1(0)-C_1(t) & C_2(0)-C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det\begin{pmatrix} C_1(0)-x & C_2(0)-y \\ C_1(0)-(C_1(0)+C_1'(0)t+Rest_1(t)) & C_2(0)-(C_2(0)+C_2'(0)t+Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det\begin{pmatrix} C_1(0)-x & C_2(0)-y \\ C_1'(0)+\frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0)+\frac{1}{t}Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x\underbrace{\left(C_2'(0)+\frac{1}{t}Rest(t)\right)}_{a(t)} - y\underbrace{\left(C_1'(0)+\frac{1}{t}Rest(t)\right)}_{b(t)} = \underbrace{det\begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0)+\frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0)+\frac{1}{t}Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gleich Wert im $t = 0$, und ist $x\frac{C_2'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} - y\frac{C_1'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} det\begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) & C_2'(0) \end{pmatrix}$

Also, die Richtungsvektor der Grenzwertgerade ist (proportional zu)

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$, wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x\underbrace{\left(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t)\right)}_{a(t)} - y\underbrace{\left(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t)\right)}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gleich Wert im $t = 0$, und ist $x \frac{C_2'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} - y \frac{C_1'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) & C_2'(0) \end{pmatrix}$

Also, die Richtungsvektor der Grenzwertgerade ist (proportional zu) $\begin{pmatrix} C_1'(0) \\ C_2'(0) \end{pmatrix}$,

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$, wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$x \underbrace{(C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest(t))}_{a(t)} - y \underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t}Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gleich Wert im $t = 0$, und ist $x\frac{C_2'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} - y\frac{C_1'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) & C_2'(0) \end{pmatrix}$

Also, die Richtungsvektor der Grenzwertgerade ist (proportional zu) $\begin{pmatrix} C_1'(0) \\ C_2'(0) \end{pmatrix}$, und die Gerade geht durch $C(0)$,

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$,

wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - C_1(t) & C_2(0) - C_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1(0) - (C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t)) & C_2(0) - (C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det \begin{pmatrix} C_1(0) - x & C_2(0) - y \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\underbrace{x\,(C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{a(t)} - y\,\underbrace{(C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest(t))}_{b(t)} = \underbrace{det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) + \frac{1}{t} Rest_1(t) & C_2'(0) + \frac{1}{t} Rest_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gleich Wert im $t = 0$, und ist $x \frac{C_2'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} - y \frac{C_1'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} det \begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) & C_2'(0) \end{pmatrix}$

Also, die Richtungsvektor der Grenzwertgerade ist (proportional zu) $\begin{pmatrix} C_1'(0) \\ C_2'(0) \end{pmatrix}$, und die Gerade geht durch $C(0)$, also ist wie in der analytischen Definition.

Beweis OBdA ist $t_0 = 0$. Betrachte die Teilor-Reihe von $C_1(t)$, $C_2(t)$ im Punkt $t = 0$:

$C_1(t) = C_1(0) + C_1'(0)t + Rest_1(t) \quad C_2(t) = C_2(0) + C_2'(0)t + Rest_2(t)$, wobei $\lim_{t\to 0} \frac{Rest_1(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Rest_2(t)}{t} = 0$.

Dann ist die Gleichung der Sekante durch $C(0), C(t)$ gleich (LAAG1, Vorl. 25)

$$det\begin{pmatrix} C_1(0)-x & C_2(0)-y \\ C_1(0)-C_1(t) & C_2(0)-C_2(t)\end{pmatrix} = 0 \iff$$

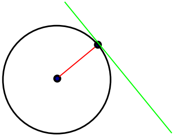
$$det\begin{pmatrix} C_1(0)-x & C_2(0)-y \\ C_1(0)-(C_1(0)+C_1'(0)t+Rest_1(t)) & C_2(0)-(C_2(0)+C_2'(0)t+Rest_2(t))\end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$det\begin{pmatrix} C_1(0)-x & C_2(0)-y \\ C_1'(0)+\frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0)+\frac{1}{t}Rest_2(t)\end{pmatrix} = 0 \iff$$

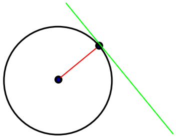
$$x\underbrace{\left(C_2'(0)+\frac{1}{t}Rest(t)\right)}_{a(t)} - y\underbrace{\left(C_1'(0)+\frac{1}{t}Rest(t)\right)}_{b(t)} = \underbrace{det\begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0)+\frac{1}{t}Rest_1(t) & C_2'(0)+\frac{1}{t}Rest_2(t)\end{pmatrix}}_{\text{OBdA ist Vorzeichen von } c(t) \text{ konstant in der nähe von } 0}$$

Da die Normalisierung $a \mapsto \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $b \mapsto \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c \mapsto \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ist stetig bzgl. a, b, c, Grenzwert von $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gleich Wert im $t = 0$, und ist $x\frac{C_2'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} - y\frac{C_1'(0)}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1'(0)^2+C_2'(0)^2}} det\begin{pmatrix} C_1(0) & C_2(0) \\ C_1'(0) & C_2'(0)\end{pmatrix}$

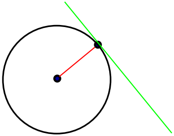
Also, die Richtungsvektor der Grenzwertgerade ist (proportional zu) $\begin{pmatrix} C_1'(0) \\ C_2'(0)\end{pmatrix}$, und die Gerade geht durch $C(0)$, also ist wie in der analytischen Definition.



Bsp.

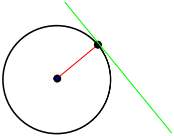


Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right.$,



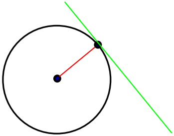
Def. 37

Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)},\ t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}.$



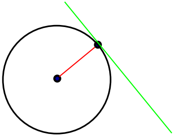
Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)},\ t \in [0,2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)}s,\ \text{wobei } s \in \mathbb{R}\right\}.$

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven,*



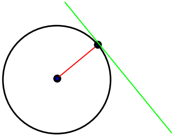
Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)},\ t \in [0,2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s,\ \text{wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden.*



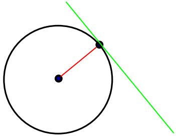
Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)}, t \in [0,2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven*



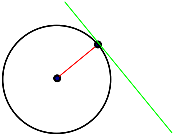
Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix},\right.$ $\left. t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t_0)\\ \sin(t_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\ \cos(t_0)\end{pmatrix}s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt*



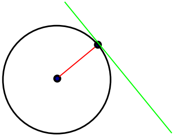
Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)},\ t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s,\ \text{wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt.*



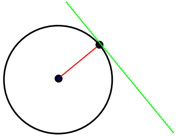
Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix},\right.$ $\left. t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t_0)\\ \sin(t_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\ \cos(t_0)\end{pmatrix}s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}.$

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$,*



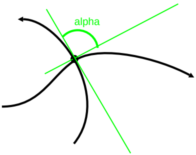
Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)}, t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*

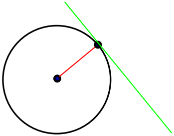


Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)}, t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*

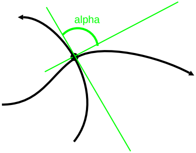


Satz 35

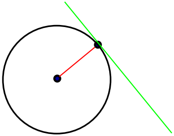


Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix},\ t \in [0,2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t_0)\\ \sin(t_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\ \cos(t_0)\end{pmatrix} s,\ \text{wobei } s \in \mathbb{R}\right\}.$

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*

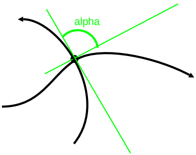


Satz 35 *Seien $C(t), \overline{C}(t)$ glatte ebene Kurven,*

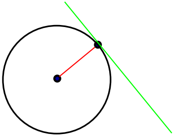


Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)},\ t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der* *Winkel zwichen Kurven* *im Schnittpunkt heißt der Winkel (**alpha* *$\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so* *berühren die Kurven ein einander*

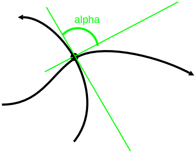


Satz 35 *Seien $C(t), \overline{C}(t)$ glatte ebene Kurven, die im Punkt $P \neq O$ einander schneiden.*

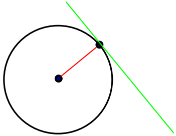


Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t_0)\\ \sin(t_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\ \cos(t_0)\end{pmatrix} s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

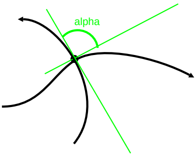
Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*



Satz 35 *Seien $C(t), \overline{C}(t)$ glatte ebene Kurven, die im Punkt $P \neq O$ einander schneiden. Dann gilt:*

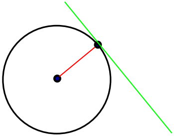


Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, t \in [0,2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t_0)\\ \sin(t_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\ \cos(t_0)\end{pmatrix} s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}.$

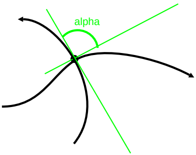


Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*

Satz 35 *Seien $C(t), \overline{C}(t)$ glatte ebene Kurven, die im Punkt $P \neq O$ einander schneiden. Dann gilt: Winkel zwischen C und $\bar{C}$ im Punkt P gleich Winkel zwischen*

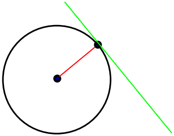


Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix},\right.$ $\left. t \in [0,2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t_0)\\ \sin(t_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\ \cos(t_0)\end{pmatrix}s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}.$



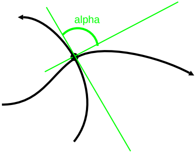
Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*

Satz 35 *Seien $C(t), \overline{C}(t)$ glatte ebene Kurven, die im Punkt $P \neq O$ einander schneiden. Dann gilt: Winkel zwischen C und $\bar{C}$ im Punkt P gleich Winkel zwischen $I_{O,r}(C(t))$, $I_{O,r}(\overline{C}(t))$*

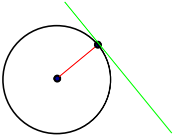


Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)},\ t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s,\ \text{wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*

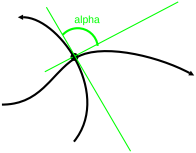


Satz 35 *Seien $C(t), \overline{C}(t)$ glatte ebene Kurven, die im Punkt $P \neq O$ einander schneiden. Dann gilt: Winkel zwischen C und $\bar{C}$ im Punkt P gleich Winkel zwischen $I_{O,r}(C(t))$, $I_{O,r}(\overline{C}(t))$ im Punkt $I_{O,r}(P)$.*



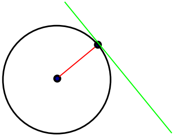
Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\begin{pmatrix}\cos(t_0)\\ \sin(t_0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sin(t_0)\\ \cos(t_0)\end{pmatrix} s, \text{ wobei } s \in \mathbb{R}\right\}$.

Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*

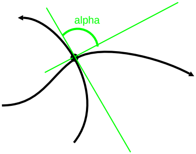


Satz 35 *Seien $C(t), \overline{C}(t)$ glatte ebene Kurven, die im Punkt $P \neq O$ einander schneiden. Dann gilt: Winkel zwischen C und $\bar{C}$ im Punkt P gleich Winkel zwischen $I_{O,r}(C(t)), I_{O,r}(\overline{C}(t))$ im Punkt $I_{O,r}(P)$.*

In Worten:



Bsp. Tangente zu Kreis $\left\{\binom{\cos(t)}{\sin(t)},\ t \in [0, 2\pi]\right\}$ im t_0 ist die Gerage $\left\{\binom{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} + \binom{-\sin(t_0)}{\cos(t_0)} s,\ \text{wobei } s \in \mathbb{R}\right\}.$



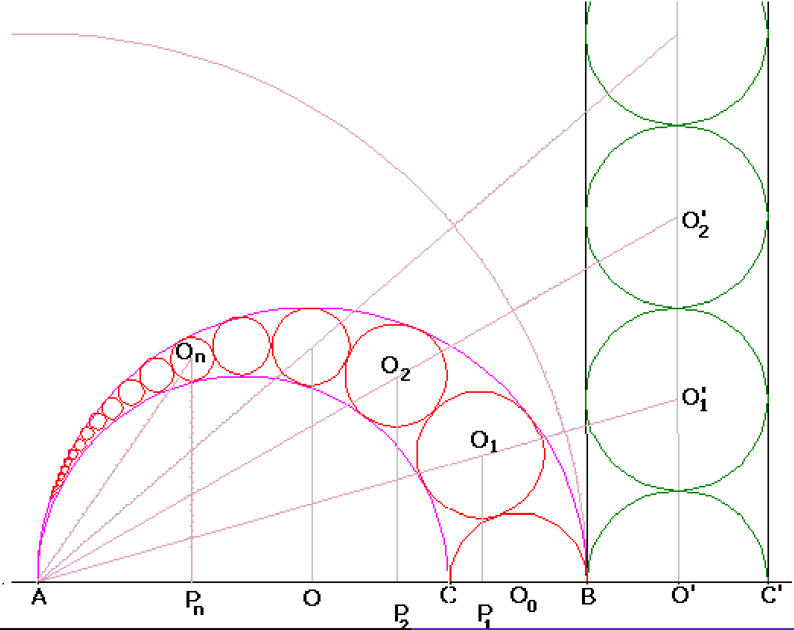
Def. 37 *Sei $C(t)$ und $\overline{C}(t)$ zwei Kurven, die ein einander in Punkt $P = C(t_0) = \bar{C}(\bar{t}_0)$ schneiden. Der Winkel zwichen Kurven im Schnittpunkt heißt der Winkel (alpha $\in [0, \frac{\pi}{2}]$) zwischen deren Tangenten im Punkt. Ist der Winkel $= 0$, so berühren die Kurven ein einander*

Satz 35 *Seien $C(t), \overline{C}(t)$ glatte ebene Kurven, die im Punkt $P \neq O$ einander schneiden. Dann gilt: Winkel zwischen C und $\bar{C}$ im Punkt P gleich Winkel zwischen $I_{O,r}(C(t))$, $I_{O,r}(\overline{C}(t))$ im Punkt $I_{O,r}(P)$.*

In Worten: Inversion ist Winkeltreu.

Diese Information genügend oft, qualitative Bilder zu machen. Z.B.

Diese Information genügend oft, qualitative Bilder zu machen. Z.B.



Diese Information genügend oft, qualitative Bilder zu machen. Z.B.