



## Formeln und Konstanten für die Berechnung der Schweizerischen schiefachsigen Zylinderprojektion und der Transformation zwischen Koordinatensystemen

Oktober 2008

<b>1 Grundlagen</b> .....	<b>1</b>
1.1 Zusammenfassung der in der Schweiz verwendeten Bezugssysteme und Bezugsrahmen.....	1
1.2 In der Schweiz verwendete Höhensysteme .....	2
1.3 In der Schweiz verwendete Bezugs-Ellipsoide.....	3
1.4 Transformationsparameter CHTRS95/ETRS89 $\leftrightarrow$ CH1903+ .....	3
1.5 Granit87-Parameter .....	3
<b>2 Umrechnung zwischen ellipsoidischen und geozentrisch-kartesischen Koordinaten</b> .....	<b>4</b>
2.1 Ellipsoidische Koordinaten (Länge $\lambda$ , Breite $\varphi$ , Höhe $h$ ) $\Rightarrow$ geozentrisch-kartesische Koordinaten $X, Y, Z$ .....	4
2.2 Geozentrisch-kartesische Koordinaten $X, Y, Z$ $\Rightarrow$ ellipsoidische Koordinaten (Länge $\lambda$ , Breite $\varphi$ , Höhe $h$ ) .....	4
<b>3 Schweizer Projektionsformeln</b> .....	<b>5</b>
3.1 Bezeichnungen, Konstanten, Hilfsgrössen.....	5
3.2 Ellipsoid. Koordinaten $(\lambda, \varphi) \Rightarrow$ Schweiz. Projektionskoordinaten $(y, x)$ (strenge Formeln).....	6
3.3 Schweizer Projektionskoordinaten $(y, x) \Rightarrow$ ellipsoid. Koordinaten $(\lambda, \varphi)$ (strenge Formeln).....	7
3.4 Schweiz. Projektionskoordinaten $(y, x) \Rightarrow$ ellipsoid. Koordinaten $(\varphi, \lambda)$ (Näherungsformeln).....	8
3.5 ellipsoid. Koordinaten $(\lambda, \varphi) \Rightarrow$ Schweiz. Projektionskoordinaten $(y, x)$ (Näherungsformeln).....	9
3.6 Formeln für die Meridiankonvergenz und die Längenverzerrung.....	10
<b>4 Näherungslösungen CH1903 <math>\leftrightarrow</math> WGS84</b> .....	<b>11</b>
4.1 Näherungsformeln für die direkte Umrechnung von: ellipsoidischen WGS84-Koordinaten $(\lambda, \varphi, h) \Rightarrow$ Schweizer Projektionskoordinaten $(y, x, h')$ .....	11
4.2 Näherungsformeln für die direkte Umrechnung von: Schweizer Projektionskoordinaten $(y, x, h') \Rightarrow$ ellipsoidische WGS84-Koordinaten $(\lambda, \varphi, h)$ .....	12
<b>5 Grafische Darstellung der Differenzen zwischen CH1903 und ETRS89/WGS84</b> ....	<b>13</b>
<b>6 Zusammenfassung der Transformationen</b> .....	<b>16</b>
6.1 von LV03/LN02 nach ETRS89 .....	16
6.2 von ETRS89 nach LV03/LN02 .....	16
<b>7 Zahlenbeispiele</b> .....	<b>17</b>
7.1 Koordinatentransformation LV03/LN02 $\Rightarrow$ ETRS89 .....	17
7.2 Koordinatentransformation ETRS89 $\Rightarrow$ LV03/LN02.....	18
<b>8 Literatur</b> .....	<b>18</b>

---

# 1 Grundlagen

## 1.1 Zusammenfassung der in der Schweiz verwendeten Bezugssysteme und Bezugsrahmen

System	Rahmen	Ellipsoid	Kartenprojektion
ETRS89	ETRF93	GRS80	(UTM)
CHTRS95	CHTRF95, CHTRF98	GRS80	(UTM, Zone 32)
CH1903	LV03 (LV03-C, LV03-M)	Bessel 1841	schiefachsig konforme Zylinderprojektion
CH1903+	LV95	Bessel 1841	schiefachsig konforme Zylinderprojektion

Das 3D-Bezugssystem **CHTRS95** (Swiss Terrestrial Reference System 1995) ist eng an das europäische Bezugssystem **ETRS89** angelehnt und mit diesem zum Zeitpunkt 1993.0 identisch. Da bisher keine Gründe vorliegen, daran etwas zu ändern, werden die beiden Systeme auch bis auf weiteres identisch bleiben. Die bisher realisierten Referenzrahmen CHTRF95, CHTRF98 und CHTRF2004 basieren auf den geozentrischen Koordinaten der Fundamentalstation Zimmerwald in ETRF93 zur Epoche 1993.0.

**CH1903** ist das klassische, aus der Triangulation abgeleitete Referenzsystem. Sein Referenzrahmen **LV03** ist in den meisten Kantonen immer noch der offizielle Rahmen für die amtliche Vermessung. Ursprünglich wurde das System nur lokal relativ zum Meridian von Bern festgelegt und das Projektionszentrum erhielt die Koordinaten 0 / 0. Diese so genannten Zivilkoordinaten (LV03-C) wurden später durch die Militärkoordinaten oder Landeskoordinaten (LV03-M) ersetzt. In diesem System erhielt das Projektionszentrum die Koordinaten 600'000 m / 200'000 m um negative Werte und Verwechslungen zwischen Ostwert und Nordwert zu vermeiden. Zudem wurde das System nun auch in Bezug zum Meridian von Greenwich festgelegt. Im Verlauf des zwanzigsten Jahrhunderts haben alle Kantone die Landeskoordinaten übernommen. Nur das Fürstentum Liechtenstein verwendet bis heute die Zivilkoordinaten offiziell in der amtlichen Vermessung. Technisch können die beiden Systeme LV03-C und LV03-M exakt mit denselben Formeln und Konstanten gerechnet werden - ausser den Werten für den Koordinatenursprung.

Das lokale Bezugssystem **CH1903+** mit dem Referenzrahmen **LV95** (Landesvermessung 1995) ist von CHTRS95 abgeleitet. Dabei wurde darauf geachtet, dass CH1903+ möglichst gut mit dem bisherigen Referenzsystem CH1903 übereinstimmt. Die Parameter, welche das System definieren, wurden allerdings vom heute nicht mehr verwendbaren Fundamentalpunkt (alte Sternwarte Bern) auf den neuen Fundamentalpunkt in Zimmerwald transferiert. Um Verwechslungen zwischen LV03 und LV95 auszuschliessen, erhielt das Projektionszentrum (welches in der alten Sternwarte Bern verbleibt) die Koordinaten 2'600'000 m / 1'200'000 m („false easting/northing“). Ausser diesem Offset bleiben in LV95 alle Formeln und Konstanten identisch mit denjenigen von CH1903/LV03. In LV95 erhält der Ostwert üblicherweise die Abkürzung E, während der Nordwert mit N abgekürzt wird.

Die Referenzrahmen LV03 und LV95 unterscheiden sich wegen der in LV03 vorhandenen Verzerrungen um bis zu 1.6 Meter. Diese lokalen Verzerrungen werden durch lokale affine Transformationen modelliert (Programm FINELTRA, Datensatz CHENyx06) oder es werden die daraus abgeleiteten Verzerrungsgitter im Format für verschiedene GPS- oder GIS-Systeme verwendet.

Alle Transformationsaufgaben zwischen den verschiedenen schweizerischen Referenzsystemen und -rahmen können mit dem Programm REFRAME durchgeführt werden, welches auch in einem Gratis-Rechendienst über Internet angeboten wird.

## 1.2 In der Schweiz verwendete Höhensysteme

Das bis heute offizielle Höhensystem **LN02** wurde im Jahre 1902 durch die Festlegung der Meereshöhe des Repère Pierre du Niton  $H(\text{RPN})=373.6$  m in Genf definiert, welche aus einer Anschlussmessung an den Pegel von Marseille stammt. Die Höhen der einzelnen Nivellementsunkte wurden durch reine Nivellementsmessungen ohne Berücksichtigung des Schwerefeldes und durch Einzwängung in die Knotenwerte des Nivellement de Précision (1864 - 1891) bestimmt.

Das neue Höhensystem **LHN95** (Landeshöhennetz 1995) basiert ebenfalls auf der Höhe des RPN. Jedoch wurde das daraus abgeleitete Potential des Fundamentalpunktes in Zimmerwald als definierende Grösse festgelegt. Die Höhen der Punkte des LHN95 werden aus einer kinematischen Netzausgleichung des Landesnivellements unter Berücksichtigung von Schweremessungen bestimmt. An den Benutzer werden aus den Potentialwerten berechnete orthometrische Höhen (LHN95-o) abgegeben; es sind jedoch auch Normalhöhen (LHN95-n) erhältlich.

Für den Datenaustausch mit den Nachbarländern wurde zusätzlich noch das Höhensystem **CHVN95** definiert. Dieses ist zurzeit mit dem europäischen Höhensystem EVRS2000 identisch. Es stützt sich auf die Höhendefinition des Pegels von Amsterdam (NAP) und auf die Resultate des europäischen Nivellements (UELN) und des europäischen Höhennetzes (EUVN). Die Höheninformation wird in diesem System in Form von Potentialen und Normalhöhen ausgetauscht.

Die Beziehung zwischen den physikalischen Höhen von LHN95 und CHVN95 mit den in CH1903+ und CHTRS95 berechneten ellipsoidischen Höhen wird durch das Geoidmodell **CHGeo2004** hergestellt, welches aus Schweremessungen, Lotabweichungen und GPS/Nivellement berechnet wurde.

Die Unterschiede zwischen den Normalhöhen von LHN95-n und denjenigen von CHVN95 (~EVRS) werden vorläufig durch einen einfachen Höhenoffset von 10.3 cm (LHN95- minus EVRS-Höhe) modelliert. Dieser Wert stammt aus einem Vergleich von LHN95 mit den Resultaten von UELN95/98.

Die Differenzen zwischen den orthometrischen Höhen von LHN95 und LN02 betragen zwischen -20 cm im Norden des Landes und +50 cm auf den höchsten Alpengipfeln und zeigen eine hohe Korrelation mit der Meereshöhe. Sie können wegen der unterschiedlichen Berücksichtigung des Schwerefeldes, der Berücksichtigung der Vertikalbewegungen und der in LN02 eingeführten gezwängten Lagerung nicht durch einen einfachen Offset modelliert werden. Für eine Transformation zwischen diesen beiden Systemen werden die Differenzen in zwei Teile separiert: Der erste Teil besteht aus den Differenzen zwischen LN02 und den Normalhöhen, während der zweite Teil einen lokalen Höhenmassstab beschreibt, welcher die Differenzen zwischen Normalhöhen und orthometrischen Höhen modelliert. Beide Anteile werden in Gittern mit einer Auflösung von 1 km berechnet.

Alle Höhentransformationen in der Schweiz können mit der Software HTRANS berechnet werden, welches auch einen Bestandteil des generelleren Transformationsprogramms REFRAME bildet.



### 1.3 In der Schweiz verwendete Bezugs-Ellipsoide

Ellipsoid	gr. Halbachse a [m]	kl. Halbachse b [m]	Abplattung 1/f	1. num. Exzentr. e <sup>2</sup>
Bessel 1841	6377397.155	6356078.962822	299.15281285	0.006674372230614
GRS 80	6378137.000	6356752.314140	298.257222101	0.006694380023011
WGS 84	6378137.000	6356752.314245	298.257223563	0.006694379990197

Abplattung:  $f = \frac{a-b}{a}$

erste numerische Exzentrizität im Quadrat:  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$

### 1.4 Transformationsparameter CHTRS95/ETRS89 ↔ CH1903+

Bei diesen Parametern handelt es sich um die seit 1997 verwendeten Werte zur Transformation zwischen CHTRS95 und CH1903+. Sie können aber ohne Einschränkung auch für ETRS89 und für viele Zwecke auch für CH1903 verwendet werden. Im Fall von CH1903 ist allerdings zu beachten, dass wegen der lokalen Verzerrungen dieses Netzes die transformierten Koordinaten von den offiziellen Koordinaten um bis zu 1.6 Meter abweichen können.

$$\begin{aligned} X_{CH1903+} &= X_{CHTRS95} - 674.374 \text{ m} \\ Y_{CH1903+} &= Y_{CHTRS95} - 15.056 \text{ m} \\ Z_{CH1903+} &= Z_{CHTRS95} - 405.346 \text{ m} \end{aligned}$$

### 1.5 Granit87-Parameter

Diese Parameter wurden zwischen 1987 und 1997 für die Transformation zwischen CH1903 und WGS84 verwendet. Wir empfehlen deren Gebrauch heute nicht mehr.

$$\begin{aligned} dX &= 660.077 \text{ m} & \alpha &= r_x = 2.484 \text{ cc (Neusekunden)} \\ dY &= 13.551 \text{ m} & \beta &= r_y = 1.783 \text{ cc (Neusekunden)} \\ dZ &= 369.344 \text{ m} & \gamma &= r_z = 2.939 \text{ cc (Neusekunden)} \\ s &= 1.00000566 \text{ (m = 5.66 ppm)} \end{aligned}$$

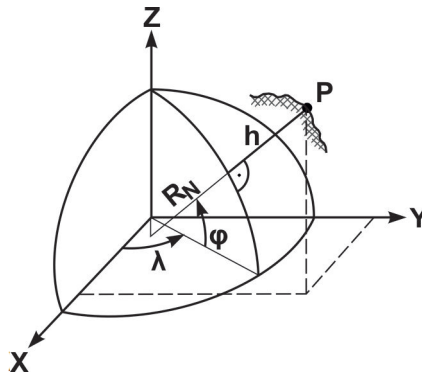
zu den Berechnungsformeln:

$$\begin{pmatrix} X_{WGS\ 84} \\ Y_{WGS\ 84} \\ Z_{WGS\ 84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} + s \cdot D \cdot \begin{pmatrix} X_{CH1903} \\ Y_{CH1903} \\ Z_{CH1903} \end{pmatrix} \quad \text{mit der Drehmatrix } D = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \text{ und deren Elementen}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos \beta \cos \gamma \\ r_{21} &= -\cos \beta \sin \gamma \\ r_{31} &= \sin \beta \\ r_{12} &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ r_{22} &= \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ r_{32} &= -\sin \alpha \cos \beta \\ r_{13} &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ r_{23} &= \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ r_{33} &= \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

## 2 Umrechnung zwischen ellipsoidischen und geozentrisch-kartesischen Koordinaten

### 2.1 Ellipsoidische Koordinaten (Länge $\lambda$ , Breite $\varphi$ , Höhe $h$ ) $\Rightarrow$ geozentrisch-kartesische Koordinaten $X, Y, Z$



$$\begin{aligned} X &= (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ Y &= (R_N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ Z &= (R_N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

mit Normalkrümmungsradius:  $R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$

Die Parameter  $a$  und  $e$  sind abhängig vom verwendeten Referenzellipsoid:

$a$  = grosse Halbachse des Ellipsoids  
 $b$  = kleine Halbachse des Ellipsoids

$e$  = erste numerische Exzentrizität des Ellipsoids =  $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

### 2.2 Geozentrisch-kartesische Koordinaten $X, Y, Z$ $\Rightarrow$ ellipsoidische Koordinaten (Länge $\lambda$ , Breite $\varphi$ , Höhe $h$ )

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad \varphi = \arctan\left(\frac{Z}{\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{1 - \frac{R_N \cdot e^2}{R_N + h}}}\right) \quad h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - R_N$$

mit  $R_N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$

**zu beachten ist:** Die Grössen  $\varphi$ ,  $R_N$  und  $h$  sind voneinander abhängig. Deshalb müssen sie durch einen **iterativen Prozess** (ausgehend von einem Näherungswert  $\varphi_0$ ) berechnet werden:

Vorschlag für  $\varphi_0$ :  $\varphi_0 = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$

### 3 Schweizer Projektionsformeln

#### 3.1 Bezeichnungen, Konstanten, Hilfsgrössen

##### Bezeichnungen

$\varphi, \lambda$ :	geogr. Breite und Länge im Bezugssystem CH1903/1903+ bezüglich Greenwich
$b, l$ :	Kugelkoordinaten bezüglich Nullpunkt Bern
$\bar{b}, \bar{l}$ :	Kugelkoordinaten bezüglich Pseudoäquatorsystem in Bern
$Y, X$ :	Zivilkoordinaten
$y, x$ :	Landeskoordinaten (Militärkoordinaten) in LV03
$E, N$ :	LV95-Koordinaten

Wo nichts anderes angegeben ist, wird in den Formeln die Winkeleinheit Radian [rad] und die Längeneinheit Meter [m] vorausgesetzt.

##### Konstanten

$a$	=	6377397.155 m	grosse Halbachse des Bessel-Ellipsoids
$E^2$	=	0.006674372230614	1.numerische Exzentrizität (im Quadrat) des Bessel-Ellipsoids (*)
$\varphi_0$	=	46° 57' 08.66"	geogr. Breite des Nullpunkts in Bern (**)
$\lambda_0$	=	7° 26' 22.50"	geogr. Länge des Nullpunkts in Bern (**)

(\*) Zur Unterscheidung von der Euler'schen Konstante  $e$  wurde in den Formeln dieses Anhangs die erste numerische Exzentrizität mit  $E$  bezeichnet.

(\*\*) dabei handelt es sich um die so genannten 'alten Werte', welche für alle geodätischen Anwendungen noch heute gültig sind. Die so genannten 'neuen Werte' (aus einer Neubestimmung der astronomischen Koordinaten der alten Sternwarte Bern von 1938:  $\varphi_0 = 46^\circ 57' 07.89''$ ,  $\lambda_0 = 7^\circ 26' 22.335''$ ) wurden nur für kartografische Zwecke (Längen- und Breitenangaben auf den Landeskarten) verwendet. Wir empfehlen die Verwendung dieser Werte nicht.

##### Berechnung von Hilfsgrössen

Radius der Projektionskugel:

$$R = \frac{a \cdot \sqrt{1-E^2}}{1-E^2 \sin^2 \varphi_0} = 6378815.90365 \text{ m}$$

Verhältnis Kugellänge zu Ellipsoidlänge:

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{E^2}{1-E^2} \cdot \cos^4 \varphi_0} = 1.00072913843038$$

Breite des Nullpunkts auf der Kugel:

$$b_0 = \arcsin\left(\frac{\sin \varphi_0}{\alpha}\right) = 46^\circ 54' 27.83324844''$$

Konstante der Breitenformel:

$$K = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b_0}{2}\right)\right) - \alpha \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)\right) + \frac{\alpha \cdot E}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+E \cdot \sin \varphi_0}{1-E \cdot \sin \varphi_0}\right) = 0.0030667323772751$$

### 3.2 Ellipsoid. Koordinaten ( $\lambda, \varphi$ ) $\Rightarrow$ Schweiz. Projektionskoordinaten ( $y, x$ ) (strenge Formeln)

Die Zwischenergebnisse beziehen sich auf das Beispiel Rigi mit folgenden Werten:

$$\begin{aligned} \varphi &= 47^\circ 03' 28.95659233'' && = 0.821317799 \text{ rad} \\ \lambda &= 8^\circ 29' 11.11127154'' && = 0.148115967 \text{ rad} \end{aligned}$$

#### a) Ellipsoid ( $\varphi, \lambda$ ) $\Rightarrow$ Kugel ( $b, l$ ) (Gauss'sche Projektion)

Hilfsgrösse: 
$$S = \alpha \cdot \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right) - \frac{\alpha \cdot E}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + E \cdot \sin \varphi}{1 - E \cdot \sin \varphi} \right) + K = 0.931969601072417$$

Kugelbreite: 
$$b = 2 \cdot \left( \arctan \left( e^S \right) - \frac{\pi}{4} \right) = 0.820535226 \text{ rad}$$
  
(= 47° 00' 47.539422864")

Kugellänge: 
$$l = \alpha \cdot (\lambda - \lambda_0) = 0.0182840649 \text{ rad}$$
  
(= 1° 02' 51.3591108468")

#### b) Äquatorsystem ( $b, l$ ) $\Rightarrow$ Pseudoäquatorsystem ( $\bar{b}, \bar{l}$ ) (Rotation)

$$\bar{l} = \arctan \left( \frac{\sin l}{\sin b_0 \cdot \tan b + \cos b_0 \cdot \cos l} \right) = 0.0124662714 \text{ rad}$$
  
(= 0° 42' 51.3530463924")

$$\bar{b} = \arcsin(\cos b_0 \cdot \sin b - \sin b_0 \cdot \cos b \cdot \cos l) = 0.00192409259 \text{ rad}$$
  
(= 0° 06' 36.8725855284")

#### c) Kugel ( $\bar{b}, \bar{l}$ ) $\Rightarrow$ Projektionsebene ( $y, x$ ) (Mercator-Projektion)

$$Y = R \cdot \bar{l} = 79520.05$$

$$y_{LV03} = Y + 600000 = 679520.05$$

$$E_{LV95} = Y + 2600000 = 2679520.05$$

$$X = \frac{R}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + \sin \bar{b}}{1 - \sin \bar{b}} \right) = 12273.44$$

$$x_{LV03} = X + 200000 = 212273.44$$

$$N_{LV95} = X + 1200000 = 1212273.44$$

### 3.3 Schweizer Projektionskoordinaten (y, x) ⇒ ellipsoid. Koordinaten (λ, φ) (strenge Formeln)

Als Beispiel wurde der Punkt Rigi verwendet (LN03):

$$\begin{aligned} y &= 679520.05 \\ x &= 212273.44 \end{aligned}$$

#### a) Projektionsebene (y, x) ⇒ Kugel ( $\bar{b}$ , $\bar{l}$ )

$$\begin{aligned} Y &= y_{LV03} - 600'000 & Y &= E_{LV95} - 2'600'000 & &= 79520.05 \\ X &= x_{LV03} - 200'000 & X &= N_{LV95} - 1'200'000 & &= 12273.44 \end{aligned}$$

$$\bar{l} = \frac{Y}{R} \qquad 0.01246627136 \text{ rad}$$

$$\bar{b} = 2 \cdot \left[ \arctan\left(e^{\frac{X}{R}}\right) - \frac{\pi}{4} \right] \qquad 0.00192409259 \text{ rad}$$

#### b) Pseudoäquatorsystem ( $\bar{b}$ , $\bar{l}$ ) ⇒ Äquatorsystem (b, l)

$$b = \arcsin(\cos b_0 \cdot \sin \bar{b} + \sin b_0 \cdot \cos \bar{b} \cdot \cos \bar{l}) \qquad = 0.820535226 \text{ rad}$$

$$l = \arctan\left(\frac{\sin \bar{l}}{\cos b_0 \cdot \cos \bar{l} - \sin b_0 \cdot \tan \bar{b}}\right) \qquad = 0.0182840649 \text{ rad}$$

#### c) Kugel (b, l) ⇒ Ellipsoid (φ, λ)

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \frac{l}{\alpha} & &= 0.148115967 \text{ rad} \\ & & &= 8^\circ 29' 11.111272'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{\alpha} \left[ \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right) - K \right] + E \cdot \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin(E \cdot \sin \varphi)}{2}\right) \\ \varphi &= 2 \arctan\left(e^S\right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Die Gleichungen für φ und auch S müssen iterativ gelöst werden. Als Startwert ist φ = b zu empfehlen.

Die einzelnen Iterationsschritte ergeben folgende Ergebnisse:

0. Schritt:	S = 0	φ = 0.820535226
1. Schritt	S = 0.933114264192610	φ = 0.821315364725524
2. Schritt	S = 0.933117825679560	φ = 0.821317791017021
3. Schritt	S = 0.933117836751434	φ = 0.821317798559814
4. Schritt	S = 0.933117836785854	φ = 0.821317798583263
5. Schritt	S = 0.933117836785961	φ = 0.821317798583336
6. Schritt	S = 0.933117836785961	φ = 0.821317798583336
		φ = 47° 03' 28.956592"



### 3.4 Schweiz. Projektionskoordinaten (y, x) $\Rightarrow$ ellipsoid. Koordinaten ( $\varphi$ , $\lambda$ ) (Näherungsformeln)

vereinfacht aus: [Bolliger 1967]

#### Bezeichnungen und Masseinheiten

$\varphi$ ,  $\lambda$  = geogr. Breite und Länge bezüglich Greenwich in [10000 "]  
 Y, X = Zivilkoordinaten im Schweiz. Projektionssystem in [1000 km]  
 y, x = Landeskoordinaten (Militärkoordinaten) LV03 in [1000 km]  
 E, N = LV95-Koordinaten in [1000 km]

#### Berechnung

$$Y = y_{LV03} - 0.6 \quad X = x_{LV03} - 0.2 \quad \text{bzw.}$$

$$Y = E_{LV95} - 2.6 \quad X = N_{LV95} - 1.2$$

$$\lambda = 2.67825 + a_1 \cdot Y + a_3 \cdot Y^3 + a_5 \cdot Y^5 \quad \text{mit}$$

$$a_1 = \begin{array}{l} + 4.729\,730\,56 \\ + 0.792\,571\,4 \quad * X \\ + 0.132\,812 \quad * X^2 \\ + 0.025\,50 \quad * X^3 \\ + 0.004\,8 \quad * X^4 \end{array} \quad a_3 = \begin{array}{l} - 0.044\,270 \\ - 0.025\,50 \quad * X \\ - 0.009\,6 \quad * X^2 \end{array} \quad a_5 = + 0.000\,96$$

$$\varphi = 16.902866 + p_0 + p_2 \cdot Y^2 + p_4 \cdot Y^4 \quad \text{mit}$$

$$p_0 = 0 \quad p_2 = \begin{array}{l} - 0.271\,353\,79 \\ - 0.045\,044\,2 \quad * X \\ - 0.007\,553 \quad * X^2 \\ - 0.001\,46 \quad * X^3 \end{array} \quad p_4 = \begin{array}{l} + 0.002\,442 \\ + 0.001\,32 \quad * X \end{array}$$

#### Näherungsfehler (für $|Y| < 0.2$ und $|X| < 0.1$ ):

bei Näherung bis 3. Potenz:  $\Delta\lambda < 0.16''$  und  $\Delta\varphi < 0.04''$   
 bei Näherung bis 5. Potenz:  $\Delta\lambda < 0.00014''$  und  $\Delta\varphi < 0.00004''$

Zur Rechenkontrolle kann das vorangehende Zahlenbeispiel (Punkt Rigi) verwendet werden. Weitere Näherungsformeln und Rechenbeispiele finden sich in [Bolliger 1967].

### 3.5 ellipsoid. Koordinaten ( $\lambda, \varphi$ ) $\Rightarrow$ Schweiz. Projektionskoordinaten ( $y, x$ ) (Näherungsformeln)

vereinfacht aus: [Bolliger 1967]

#### Bezeichnungen

$\varphi, \lambda$  = geogr. Breite und Länge bezüglich Greenwich in [10'000 "]  
 $Y, X$  = Zivilkoordinaten im Schweiz. Projektionssystem in [1000 km]  
 $y, x$  = Landeskoordinaten (Militärkoordinaten) LV03 in [1000 km]  
 $E, N$  = LV95-Koordinaten in [1000 km]

#### Hilfsgrössen:

$$\Phi = \varphi - 16.902866''$$

$$\Lambda = \lambda - 2.67825''$$

#### Berechnung

$$Y = y_1 \cdot \Lambda + y_3 \cdot \Lambda^3 + y_5 \cdot \Lambda^5 \text{ mit}$$

$$y_1 = \begin{array}{l} + 0.211\,428\,533\,9 \\ - 0.010\,939\,608 \quad * \Phi \\ - 0.000\,002\,658 \quad * \Phi^2 \\ - 0.000\,008\,53 \quad * \Phi^3 \end{array}$$

$$y_3 = \begin{array}{l} - 0.000\,044\,232\,7 \\ + 0.000\,004\,291 \quad * \Phi \\ - 0.000\,000\,309 \quad * \Phi^2 \end{array}$$

$$y_5 = + 0.000\,000\,019\,7$$

$$X = x_0 + x_2 \cdot \Lambda^2 + x_4 \cdot \Lambda^4 \text{ mit}$$

$$x_0 = \begin{array}{l} 0 \\ + 0.308\,770\,746\,3 \quad * \Phi \\ + 0.000\,075\,028 \quad * \Phi^2 \\ + 0.000\,120\,435 \quad * \Phi^3 \\ + 0 \quad * \Phi^4 \\ + 0.000\,000\,07 \quad * \Phi^5 \end{array}$$

$$x_2 = \begin{array}{l} + 0.003\,745\,408\,9 \\ - 0.000\,193\,792\,7 \quad * \Phi \\ + 0.000\,004\,340 \quad * \Phi^2 \\ - 0.000\,000\,376 \quad * \Phi^3 \end{array}$$

$$x_4 = \begin{array}{l} - 0.000\,000\,734\,6 \\ + 0.000\,000\,144\,4 \quad * \Phi \end{array}$$

$$Y_{LV03} = Y + 0.6$$

$$E_{LV95} = Y + 2.6$$

$$x_{LV03} = X + 0.2 \text{ bzw.}$$

$$N_{LV95} = X + 1.2$$

#### Näherungsfehler (für $|\Lambda| < 1.0$ und $|\Phi| < 0.316$ ):

bei Näherung bis 3. Potenz:  $\Delta Y < 1.2 \text{ m}$  und  $\Delta X < 0.75 \text{ m}$

bei Näherung bis 5. Potenz:  $\Delta Y < 0.001 \text{ m}$  und  $\Delta X < 0.0007 \text{ m}$

Zur Rechenkontrolle kann das vorangehende Zahlenbeispiel (Punkt Rigi) verwendet werden. Weitere Näherungsformeln und Rechenbeispiele finden sich in [Bolliger 1967].

### 3.6 Formeln für die Meridiankonvergenz und die Längenverzerrung

Die Verzerrungen, welche durch die Projektion entstehen, können durch die **Meridiankonvergenz**  $\mu$  (Winkel zwischen der ellipsoidischen Nordrichtung und der Nordrichtung der Projektion) und der **Längenverzerrung**  $m$  (Verhältnis einer infinitesimal kleinen Strecke in der Projektion und auf dem Ellipsoid) vollständig beschrieben werden:

Meridiankonvergenz: 
$$\mu = \arctan \frac{\sin b_0 \cdot \sin l}{\cos b_0 \cdot \cos b + \sin b_0 \cdot \sin b \cdot \cos l}$$

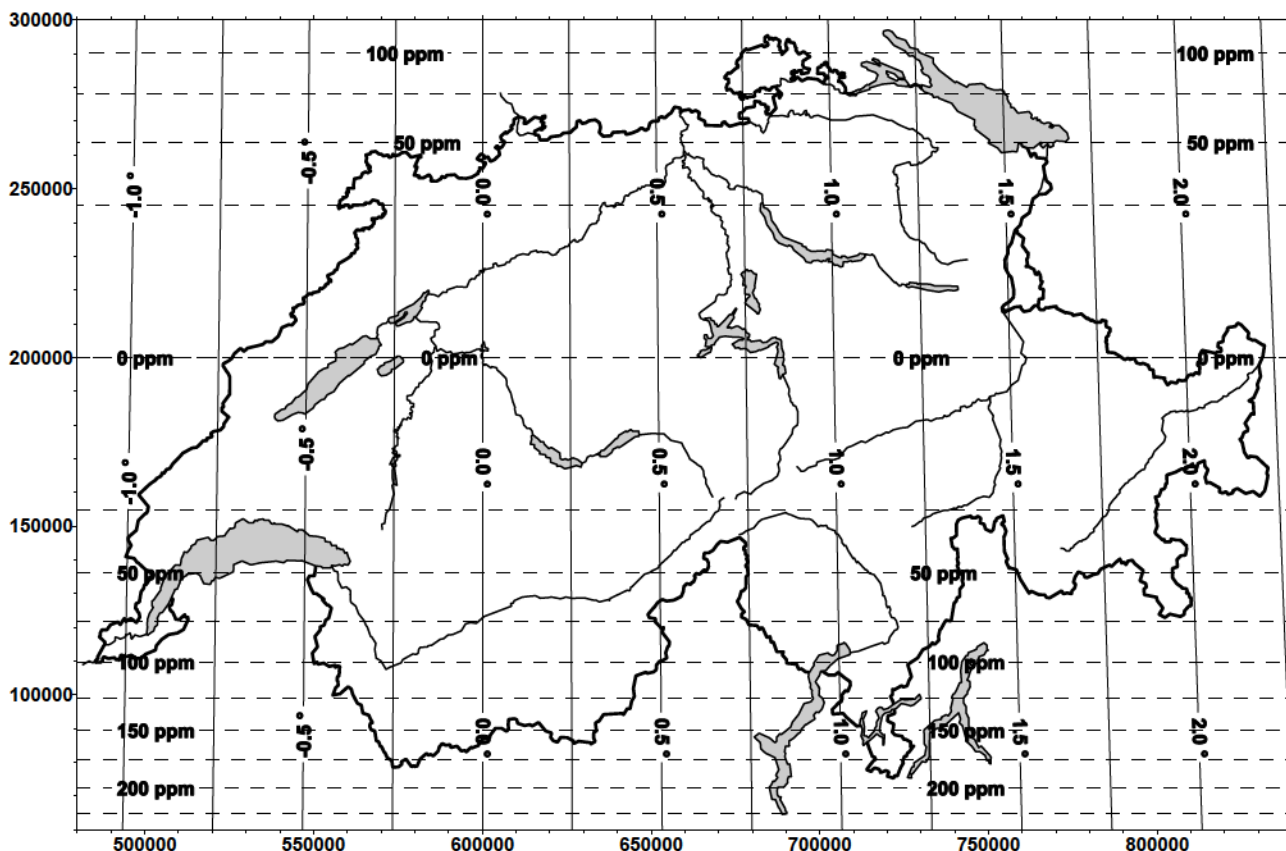
Näherungsformel: 
$$\mu = 10.668 \cdot 10^{-6} \cdot Y + 1.788 \cdot 10^{-12} \cdot Y \cdot X - 0.14 \cdot 10^{-18} \cdot Y^3$$

Dabei bezeichnen Y und X die Projektionskoordinaten im zivilen System in [m]. Die Meridiankonvergenz  $\mu$  wird in Neugrad (Gon) erhalten.

Längenverzerrung (Hauptglied): 
$$m = \frac{s_{proj}}{s_{ell}} = \alpha \cdot \frac{R}{R_N} \cdot \frac{\cos b}{\cos \varphi \cdot \cos b}$$

Näherungsformel: 
$$m = 1 + \frac{X^2}{2R^2}$$

Beispiel: Punkt Rigi (y = 679520.05, x = 212273.44)  
 Aus geogr. Koordinaten:  $\mu = 0.8499955$  gon,  $m = 1.000001852$   
 Aus Näherungsformeln:  $\mu = 0.8499946$  gon,  $m = 1.000001851$



Darstellung der Meridiankonvergenz (in Altgrad) und der Längenverzerrung (gestrichelt, in ppm)

## 4 Näherungslösungen CH1903 ↔ WGS84

### 4.1 Näherungsformeln für die direkte Umrechnung von: ellipsoidischen WGS84-Koordinaten ( $\lambda, \varphi, h$ ) ⇒ Schweizer Projektionskoordinaten ( $y, x, h'$ )

(Genauigkeit im 1-Meter-Bereich)

nach: [H. Dupraz, Transformation approchée de coordonnées WGS84 en coordonnées nationales suisses, IGEO-TOPO, EPFL, 1992]

Die Parameter wurden von U. Marti (Mai 1999) neu berechnet. Zudem wurden die Einheiten so angepasst, dass sie mit den Formeln aus [Bolliger 1967] vergleichbar werden.

1. Breite  $\varphi$  und Länge  $\lambda$  sind in Sexagesimalsekunden ["] umzuwandeln
2. Hilfsgrößen (Breiten- und Längendifferenz gegenüber Bern in der Einheit [10000"]) berechnen:

$$\varphi' = (\varphi - 169028.66 \text{ ''})/10000$$

$$\lambda' = (\lambda - 26782.5 \text{ ''})/10000$$

$$\begin{array}{rcll}
 3. \ y \text{ [m]} = & 600072.37 & & \\
 & + \ 211455.93 & * \lambda' & \\
 & - \ 10938.51 & * \lambda' & * \varphi' \\
 & - \ 0.36 & * \lambda' & * \varphi'^2 \\
 & - \ 44.54 & * \lambda'^3 & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 x \text{ [m]} = & 200147.07 & & \\
 & + \ 308807.95 & & * \varphi' \\
 & + \ 3745.25 & * \lambda'^2 & \\
 & + \ 76.63 & & * \varphi'^2 \\
 & - \ 194.56 & * \lambda'^2 & * \varphi' \\
 & + \ 119.79 & & * \varphi'^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
 h' \text{ [m]} = h - & 49.55 & & \\
 & + \ 2.73 & * \lambda' & \\
 & + \ 6.94 & & * \varphi'
 \end{array}$$

#### 4. Zahlenbeispiel

gegeben:	$\varphi = 46^\circ 2' 38.87''$	$\lambda = 8^\circ 43' 49.79''$	$h = 650.60 \text{ m}$
⇒	$\varphi' = -0.326979$	$\lambda' = 0.464729$	
⇒	$y = 699\ 999.76 \text{ m}$	$x = 99\ 999.97 \text{ m}$	$h' = 600.05 \text{ m}$
aus NAVREF:	$y = 700\ 000.0 \text{ m}$	$x = 100\ 000.0 \text{ m}$	$h' = 600 \text{ m}$

Diese Näherungen sind für die ganze Schweiz besser als 1 Meter in der Lage und 0.5 Meter in der Höhe.

**Bemerkung zu den Höhen:** In diesen Formeln wird davon ausgegangen, dass mit ellipsoidischen Höhen gearbeitet wird, wie sie z.B. mit GPS-Messungen erhalten werden. Wird mit 'Höhen über Meer' gearbeitet, so sind die Höhen im Meterbereich in beiden Systemen gleich. Sie müssen also in diesem Fall nicht umgerechnet werden.



## 4.2 Näherungsformeln für die direkte Umrechnung von: Schweizer Projektionskoordinaten (y, x, h') ⇒ ellipsoidische WGS84-Koordinaten (λ, φ, h)

(Genauigkeit im 0.1"-Bereich)

Es handelt sich dabei um eine Herleitung von U. Marti vom Mai 1999, basierend auf den Formeln aus [Bolliger, 1967]

1. Die Projektionskoordinaten y (Rechtswert) und x (Hochwert) sind ins zivile System (Bern = 0 / 0) und in die Einheit [1000 km] umzuwandeln:

$$y' = (y - 600000 \text{ m}) / 1000000$$

$$x' = (x - 200000 \text{ m}) / 1000000$$

2. Länge und Breite in der Einheit [10000"] berechnen:

$$\lambda' = \begin{array}{r} 2.6779094 \\ + 4.728982 * y' \\ + 0.791484 * y' * x' \\ + 0.1306 * y' * x'^2 \\ - 0.0436 * y'^3 \end{array}$$

$$\varphi' = \begin{array}{r} 16.9023892 \\ + 3.238272 * x' \\ - 0.270978 * y'^2 * x' \\ - 0.002528 * x'^2 \\ - 0.0447 * y'^2 * x' \\ - 0.0140 * x'^3 \end{array}$$

$$h \text{ [m]} = \begin{array}{r} h' + 49.55 \\ - 12.60 * y' \\ - 22.64 * x' \end{array}$$

3. Umrechnen der Länge und Breite in die Einheit [°]

$$\lambda = \lambda' * 100 / 36$$

$$\varphi = \varphi' * 100 / 36$$

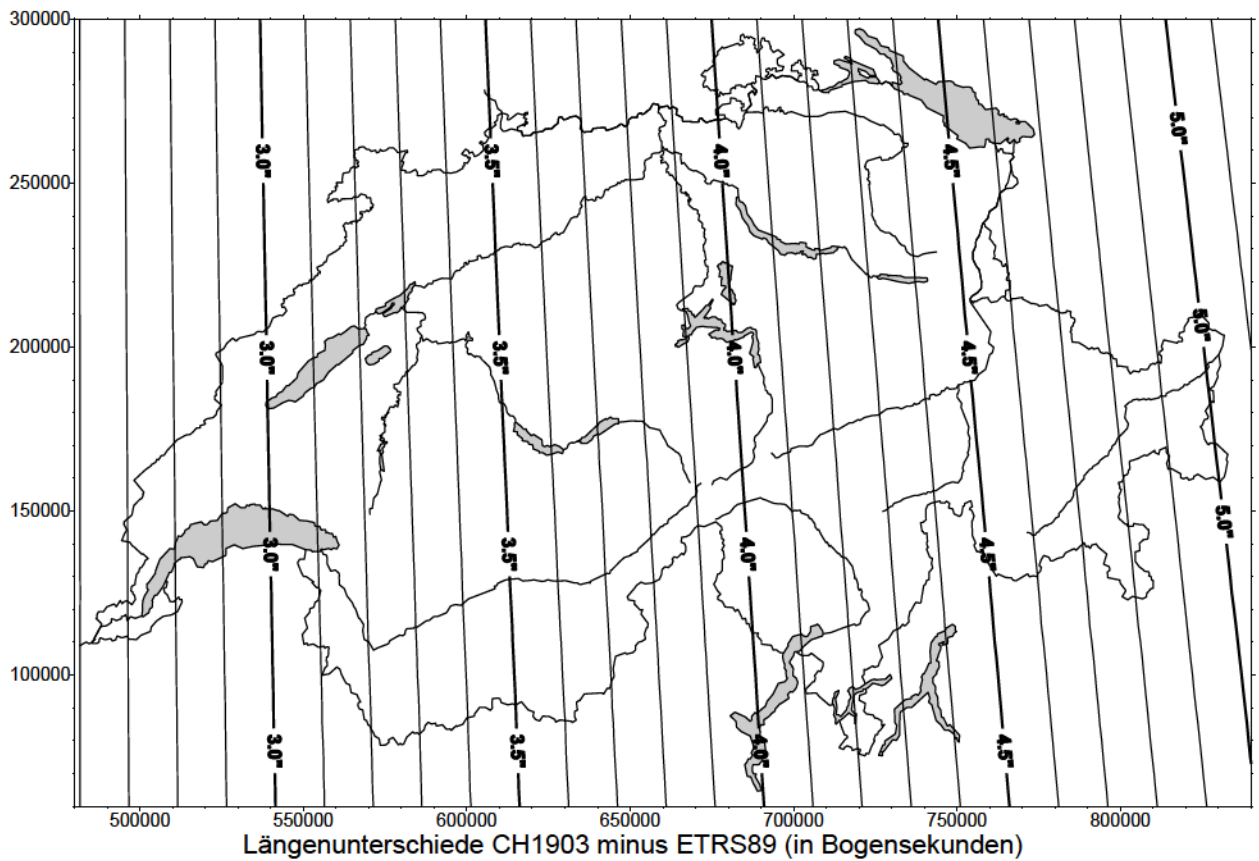
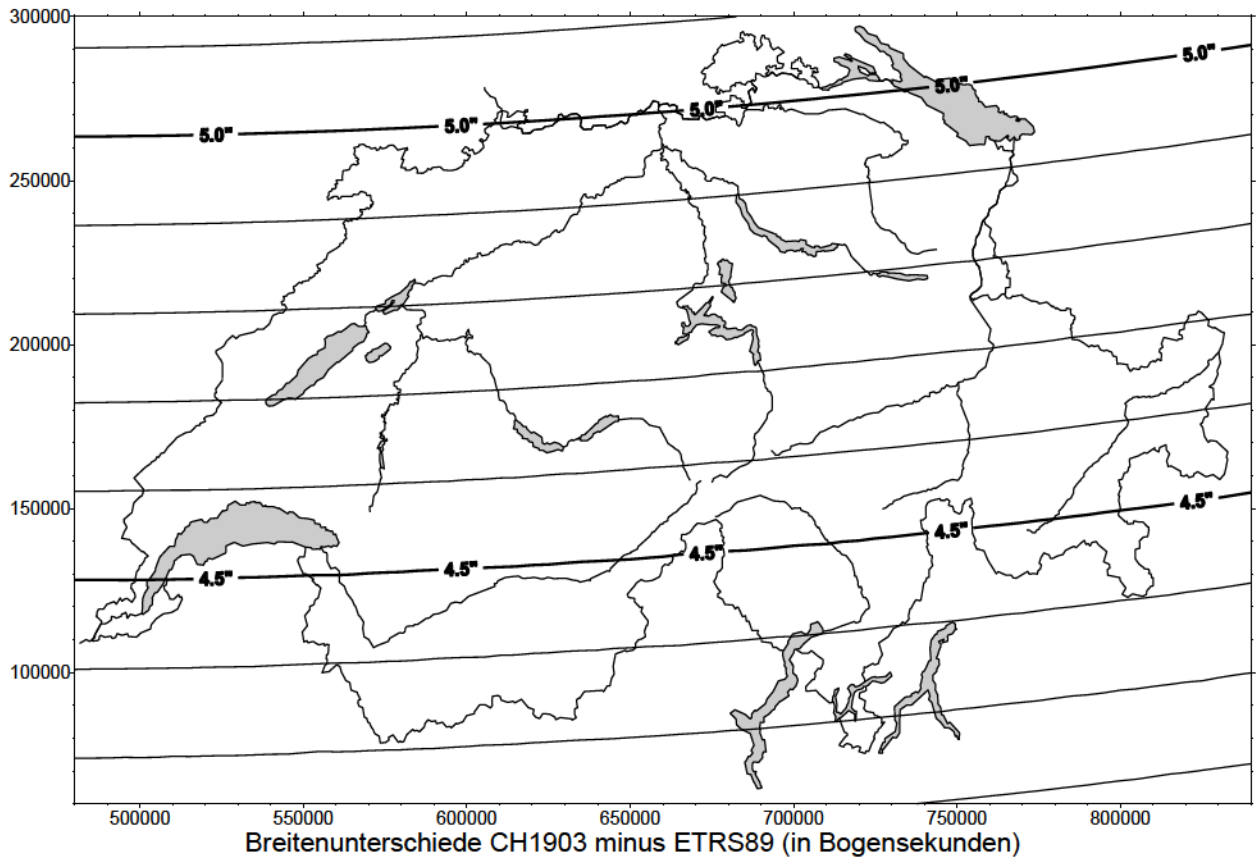
4. Zahlenbeispiel

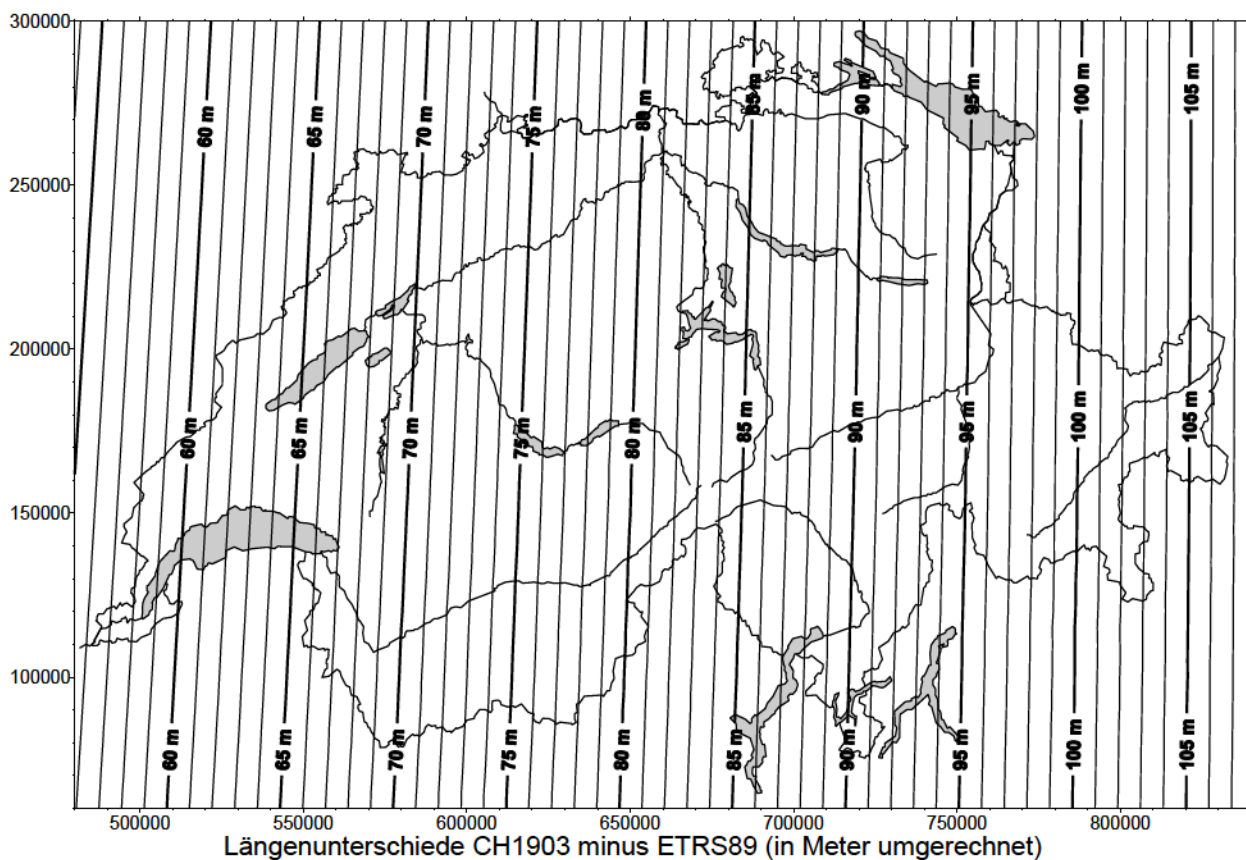
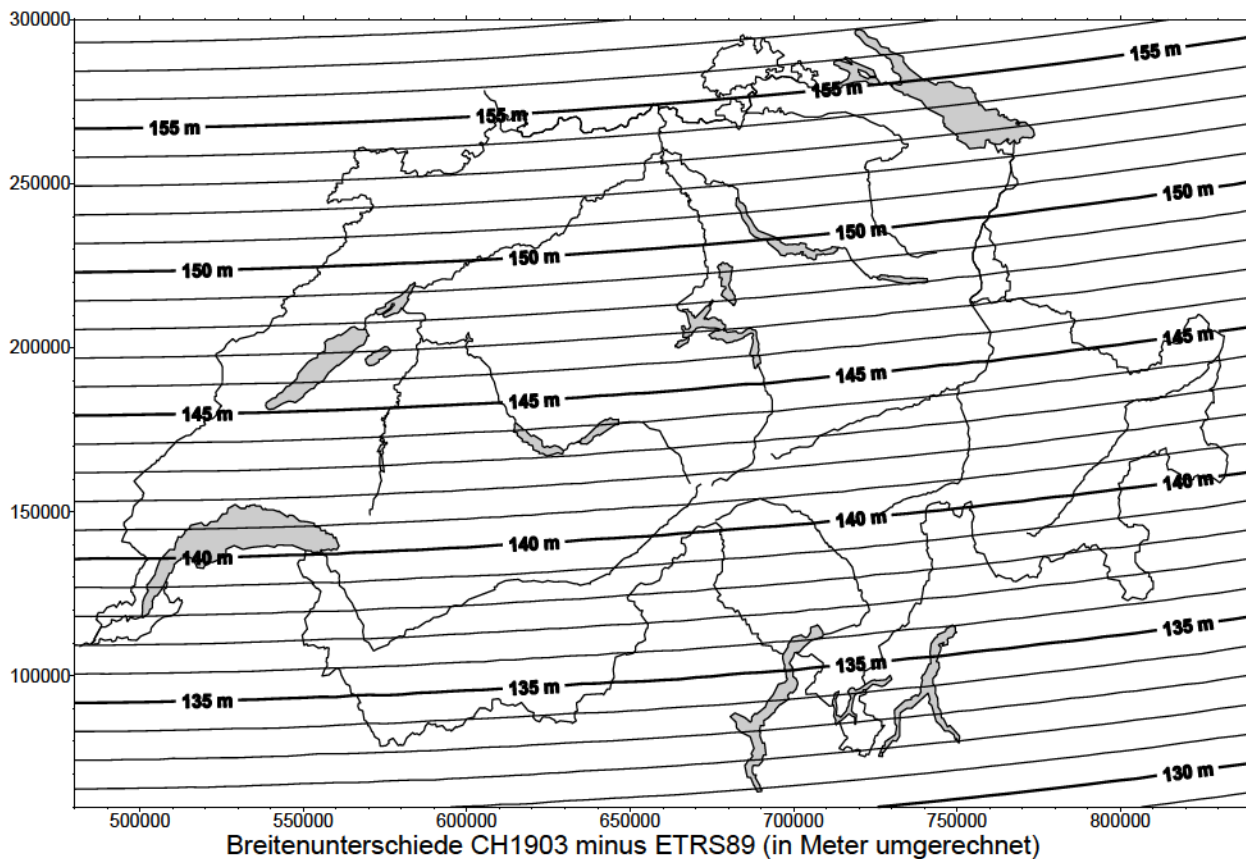
gegeben:	y = 700 000 m	x = 100 000 m	h' = 600 m
⇒	y' = 0.1	x' = -0.1	
⇒	λ' = 3.14297976	φ' = 16.57588564	h = 650.55 m
⇒	λ = 8° 43' 49.80"	φ = 46° 02' 38.86"	
aus NAVREF:	λ = 8° 43' 49.79"	φ = 46° 02' 38.87"	h = 650.60 m

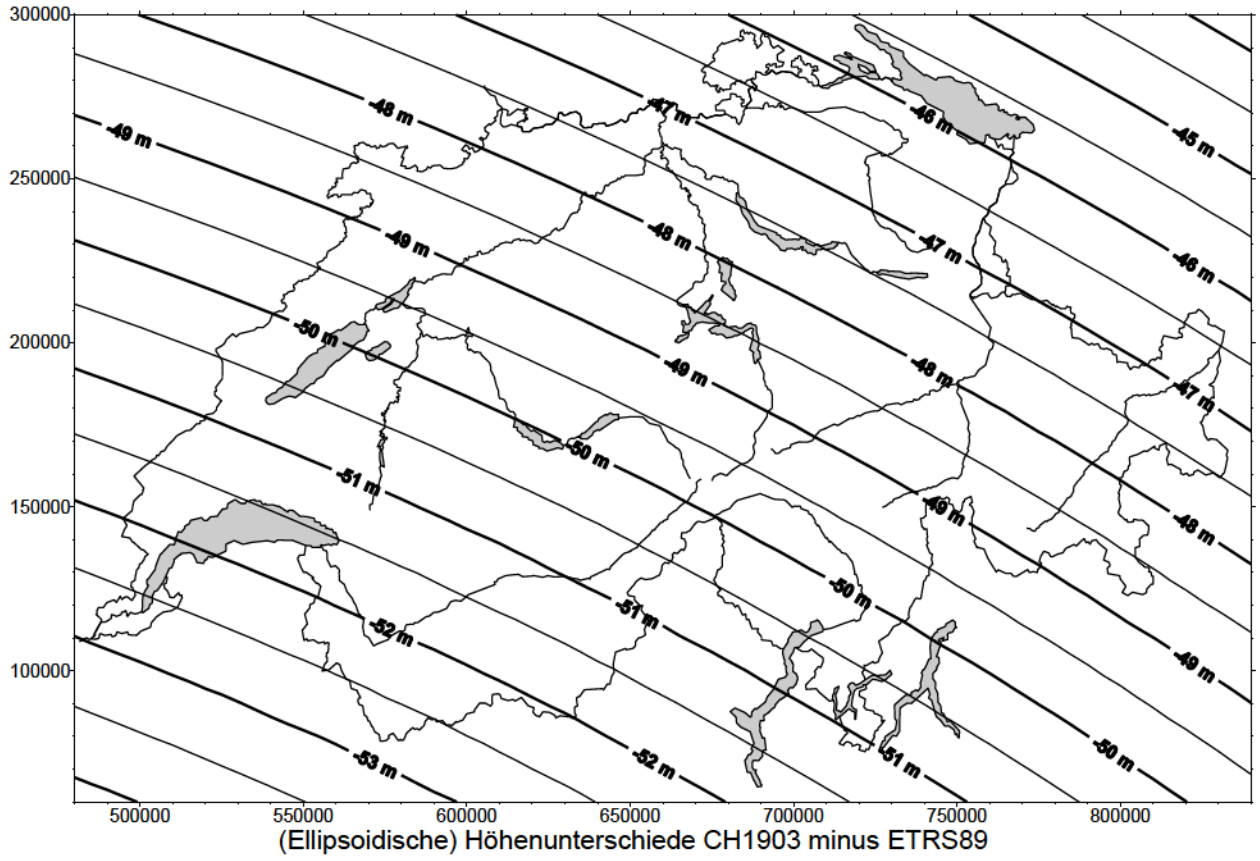
Diese Näherungen sind für die ganze Schweiz besser als 0.12" in der Länge, 0.08" in der Breite und 0.5 Meter in der Höhe.

**Bemerkung zu den Höhen:** In diesen Formeln wird davon ausgegangen, dass mit ellipsoidischen Höhen gearbeitet wird, wie sie z.B. mit GPS-Messungen erhalten werden. Wird mit 'Höhen über Meer' gearbeitet, so sind die Höhen im Meterbereich in beiden Systemen gleich. Sie müssen also in diesem Fall nicht umgerechnet werden.

### 5 Grafische Darstellung der Differenzen zwischen CH1903 und ETRS89/WGS84









## 6 Zusammenfassung der Transformationen

### 6.1 von LV03/LN02 nach ETRS89

Für eine strenge Transformation von LV03 Projektionskoordinaten und Höhen in LN02 nach ETRS89 sind die folgenden Einzelschritte nötig:

1. Transformation der LN02-Höhen in orthometrische LHN95-Höhen mit den HTrans Gittern (kann ausgelassen werden bei einer Genauigkeit im 1-Meter-Bereich oder falls die Höhen nicht interessieren)
2. Transformation der orthometrischen Höhen LHN95 in ellipsoidische Höhen mit dem Geoidmodell CHGeo2004 (kann ausgelassen werden falls die Höhen nicht interessieren; im Genauigkeitsbereich von 1 Meter, dürfen auch andere Geoidmodelle verwendet werden)
3. Transformation von LV03 nach LV95 mit dem FINELTRA-Algorithmus (CHENyx06 Datensatz) oder einer Gitter-Approximation der Differenzen (kann ausgelassen werden bei einer Genauigkeit im 1-Meter-Bereich).
4. Konversion in ellipsoidische Koordinaten CH1903+ auf dem Bessel-Ellipsoid mit den inversen Projektionsformeln aus Kapitel 3.3.
5. Konversion in geozentrisch kartesische Koordinaten (Datum CH1903+) mit den Formeln aus Kapitel 2.1 und den Parametern des Bessel-Ellipsoids. (Falls die Höhe unbekannt oder unwichtig ist, darf ein Näherungswert verwendet werden - oder auch  $H=0$  gesetzt werden, ohne dass das Resultat signifikant beeinflusst wird).
6. Datumstransformation von CH1903+ nach ETRS89 (CHTRS95) mit den Parametern aus Kapitel 1.4.
7. Berechnen von ellipsoidischen Koordinaten in ETRS89 mit den Formeln aus Kapitel 2.2 und den Parametern für das GRS80-Ellipsoid.
8. Die weitere Verarbeitung der resultierenden ellipsoidischen ETRS89-Koordinaten (Projektion oder Höhenstransformation) wird in diesem Dokument nicht behandelt

Im Genauigkeitsbereich von 1 Meter kann (innerhalb der Schweiz und im unmittelbar angrenzenden Ausland) Schritt 4 durch die Näherungsformeln aus Kapitel 3.4, oder direkt die Schritte 4 bis 7 durch die Näherungsformeln aus Kapitel 4.2 ersetzt werden.

### 6.2 von ETRS89 nach LV03/LN02

Für eine strenge Transformation von ellipsoidischen ETRS89-Koordinaten mit ellipsoidischen Höhen nach LV03/LN02 sind die folgenden Schritte notwendig:

1. Konversion in geozentrisch kartesische Koordinaten (Datum ETRS89) mit den Formeln aus Kapitel 2.1 und den Parametern des GRS80-Ellipsoids. (Falls die Höhe unbekannt oder unwichtig ist, darf ein Näherungswert verwendet werden - oder auch  $H=0$  gesetzt werden, ohne dass das Resultat signifikant beeinflusst wird).
2. Datumstransformation von ETRS89 (CHTRS95) nach CH1903+ mit den Parametern aus Kapitel 1.4.
3. Berechnen von ellipsoidischen Koordinaten in CH1903+ mit den Formeln aus Kapitel 2.2 und den Parametern für das Bessel-Ellipsoid.
4. Berechnung von LV95-Koordinaten (mit ellipsoidischen Höhen) mit den Projektionsformeln aus Kapitel 3.2.
5. Transformation von LV95 nach LV03 mit dem FINELTRA-Algorithmus (CHENyx06 Datensatz) oder einer Gitter-Approximation der Differenzen (kann ausgelassen werden bei einer Genauigkeit im 1-Meter-Bereich).
6. Transformation von ellipsoidischen Höhen in orthometrische Höhen LHN95 mit dem Geoidmodell CHGeo2004 (kann ausgelassen werden falls die Höhen nicht interessieren; im Genauigkeitsbereich von 1 Meter, dürfen auch andere Geoidmodelle verwendet werden)
7. Transformation der LHN95-Höhen nach LN02 mit den HTrans Gittern (kann ausgelassen werden bei einer Genauigkeit im 1-Meter-Bereich oder falls die Höhen nicht interessieren)

Im Genauigkeitsbereich von 1 Meter kann (innerhalb der Schweiz und im unmittelbar angrenzenden Ausland) Schritt 4 durch die Näherungsformeln aus Kapitel 3.5, oder direkt die Schritte 4 bis 7 durch die Näherungsformeln aus Kapitel 4.1 ersetzt werden.

## 7 Zahlenbeispiele

### 7.1 Koordinatentransformation LV03/LN02 ⇒ ETRS89

Als Input für dieses Beispiel wurden die EUREF-Punkte der Schweiz verwendet. Alle Berechnungen wurden mit den swisstopo-Programmen REFRAME und GEOREF durchgeführt. Kleine Unterschiede (<1 mm) in den Resultaten können durch Rundungsfehler entstehen.

#### Schweizer Projektionskoordinaten LV03 mit Gebrauchshöhen LN02

Zimmerwald	602030.680	191775.030	897.915
Chrischona	617306.300	268507.300	456.064
Pfaender	776668.105	265372.681	1042.624
La Givrine	497313.292	145625.438	1207.434
Monte Generoso	722758.810	87649.670	1636.600

⇒ FINELTRA-Transformation mit CHENyx06 und Höhentransformation mit HTrans ⇒

#### Schweizer Projektionskoordinaten LV95 mit orthometrischen Höhen LHN95

Zimmerwald	2602030.740	1191775.030	897.906
Chrischona	2617306.920	1268507.870	455.915
Pfaender	2776668.590	1265372.250	1042.528
La Givrine	2497312.650	1145626.140	1207.473
Monte Generoso	2722759.060	1087648.190	1636.794

⇒ Berechnung und Addition der Geoidundulationen (Programm CHGeo2004) ⇒

#### Schweizer Projektionskoordinaten LV95 mit ellipsoidischen Höhen und Geoidundulationen

Zimmerwald	2602030.740	1191775.030	897.361	-0.5454
Chrischona	2617306.920	1268507.870	457.138	1.2233
Pfaender	2776668.590	1265372.250	1043.616	1.0880
La Givrine	2497312.650	1145626.140	1206.367	-1.1060
Monte Generoso	2722759.060	1087648.190	1634.472	-2.3227

⇒ Konversion in ellipsoidische Koordinaten

#### Ellipsoidische Koordinaten und Höhen bezüglich CH1903+

Zimmerwald	7 27 58.416328	46 52 42.269284	897.361
Chrischona	7 40 10.574820	47 34 6.404965	457.138
Pfaender	9 47 8.465989	47 31 0.092644	1043.616
La Givrine	6 6 9.983811	46 27 19.272743	1206.367
Monte Generoso	9 1 20.606368	45 55 49.707052	1634.472

⇒ Konversion in geozentrisch kartesische Koordinaten

#### Geozentrisch-kartesische Koordinaten bezüglich CH1903+

Zimmerwald	4330616.737	567539.766	4632721.664
Chrischona	4272473.562	575353.239	4684498.293
Pfaender	4252889.174	733507.303	4681046.757
La Givrine	4377121.142	467993.592	4600671.934
Monte Generoso	4389483.221	696984.352	4560589.600

⇒ Datumstransformation von CH1903+ nach ETRS89 ⇒

#### Geozentrisch-kartesische Koordinaten bezüglich ETRS89 / CHTRS95

Zimmerwald	4331291.111	567554.822	4633127.010
Chrischona	4273147.936	575368.294	4684903.639
Pfaender	4253563.548	733522.359	4681452.103
La Givrine	4377795.516	468008.648	4601077.280
Monte Generoso	4390157.595	696999.408	4560994.946

⇒ Konversion in ellipsoidische Koordinaten

#### Ellipsoidische Koordinaten und Höhen bezüglich ETRS89

Zimmerwald	7 27 54.983506	46 52 37.540562	947.149
Chrischona	7 40 6.983077	47 34 1.385301	504.935
Pfaender	9 47 3.697723	47 30 55.172797	1089.372
La Givrine	6 6 7.326361	46 27 14.690021	1258.274
Monte Generoso	9 1 16.389053	45 55 45.438020	1685.027

## 7.2 Koordinatentransformation ETRS89 $\Rightarrow$ LV03/LN02

Um diese Berechnung zu testen, können dieselben Punkte und Werte wie im Beispiel aus Kapitel 7.1 verwendet werden - einfach in der umgekehrten Reihenfolge.

## 8 Literatur

- Bolliger J. (1967): Die Projektionen der Schweizerischen Plan- und Kartenwerke. Druckerei Winterthur AG, Winterthur.
- Dupraz H. (1992): Transformation approchée de coordonnées WGS84 en coordonnées nationales suisses, IGEO-TOPO, EPF Lausanne.
- Hilfiker J. (1902): Untersuchung der Höhenverhältnisse der Schweiz im Anschluss an den Meereshorizont. L+T, Bern.
- Marti U. (1997): Geoid der Schweiz 1997. Geodätisch-Geophysikalische Arbeiten in der Schweiz Nr. 56.
- Rosenmund M. (1903): Die Änderung des Projektionssystems der Schweizerischen Landesvermessung, L+T, Bern.
- Schlatter A. (2007): Das neue Landeshöhenetz der Schweiz LHN95. Geodätisch-Geophysikalische Arbeiten in der Schweiz Nr. 72.
- Schneider D, E. Gubler, U. Marti, W. Gurtner (2001): Aufbau der neuen Landesvermessung LV95 Teil 3: Terrestrische Bezugssysteme und Bezugsrahmen. Berichte aus der L+T Nr. 8. Wabern.
- Zölly, H. (1948): Geschichte der Geodätischen Grundlagen für Karten und Vermessungen in der Schweiz, L+T, Wabern.