Article

Probabilités et espérances dans le jeu de serpents et échelles à deux joueurs

Daniel Audet, département de mathématiques,
Collège de Bois-de-Boulogne

Résumé

Le jeu de serpents et échelles est un jeu bien connu qui consiste à déplacer un pion sur une grille à l'aide d'un dé, en montant avec les échelles et en descendant avec les serpents. Dans cet article, on trouve la probabilité de gagner ainsi que l'espérance du nombre de coups à jouer pour finir une partie à deux joueurs, dans une grille presque sûrement sans partie infinie. On montre que pour répondre à cette question on peut résoudre un système d'équations linéaires présenté sous forme matricielle.

1 L'équation matricielle des probabilités

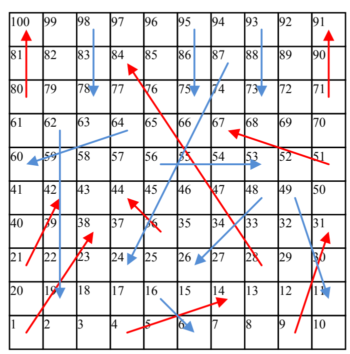
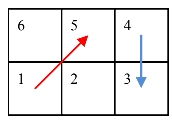


Figure 1 – Version classique du jeu avec $n = 100$

Supposons que le jeu compte $n + 1$ cases numérotées $0, 1, \ldots, n$. La case 0, absente de la grille, est celle sur laquelle les joueurs commencent avant d'avoir lancé le dé pour la première fois et la case n est celle sur laquelle on gagne. La figure (1) montre la version classique du jeu avec $n = 100$, les flèches vers le haut représentant des échelles et les flèches vers le bas représentant des serpents. On pose A comme étant la matrice n par n dont les lignes et les colonnes sont numérotées $0, 1, \ldots, n-1$ et telle que a_{ij}, l'élément situé sur la ligne i et la colonne j, est la probabilité de passer de la case i à la case j en un lancer de dé ($a_{0\ 1} = 0$, $a_{0\ 2} = 1/6$, $a_{0\ 3} = 1/6$, $a_{0\ 4} = 0$, $a_{0\ 5} = 1/6$, $a_{0\ 6} = 1/6$, $a_{0\ 14} = 1/6$ et $a_{0\ 38} = 1/6$). Cette matrice encode entièrement la structure du jeu formé d'une grille, des serpents et des échelles. Elle peut aussi encoder plusieurs variations des règlements pourvu qu'elles ne requièrent pas une prise de décision du joueur. C'est pourquoi, étant donné un jeu de serpents et échelles, nous appellerons sa matrice A la *matrice caractéristique du jeu*.



Grille 1

Exemple 1 *Considérons la grille 1 de serpents et échelles présentée ci-dessus. Supposons qu'on y joue avec un dé dont les faces sont numérotées 1,2 et 3 et tel que deux faces opposées portent le même chiffre. Alors, le tableau des probabilités de transition ainsi que la matrice caractéristique du jeu suivent. Rappelons que l'élément situé sur la ligne i et la colonne j, est la probabilité de passer de la case i à la case j en un lancer de dé.*

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	1/3	1/3	0	1/3	0
1	0	0	1/3	2/3	0	0	0
2	0	0	0	2/3	0	1/3	0
3	0	0	0	1/3	0	1/3	1/3
4	0	0	0	0	0	1/3	2/3
5	0	0	0	0	0	0	1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque qu'on ne retient pas la dernière colonne du tableau pour former la matrice A et que cela fait en sorte que la matrice A n'est pas à proprement parler une matrice stochastique, mais bien une matrice sous-stochastique. Cette information n'est cependant pas perdue, car la somme de chaque ligne du tableau est 1. Cela fait aussi en sorte que la somme des éléments de la ligne i de A donne la probabilité de ne pas passer de la case i à la case 6.
On remarque aussi que dans la ligne 1, on considère le cas où le joueur joue à partir de la case 1. Or, si la partie a débuté à 0, c'est impossible à cause de l'échelle de 1 à 5. En fait, on pourrait éliminer la ligne et la colonne 1 sans que cela n'affecte la suite. Une remarque semblable s'applique à la ligne et à la colonne 4.

Une autre chose remarquable est que la règle appliquée pour attribuer les probabilités veut qu'il ne soit pas nécessaire d'avoir la valeur exacte pour terminer la partie. En effet, à partir de la case 5 le passage à la case 6 est assuré au prochain tour. Si on désire appliquer une autre règle, il suffit de modifier les probabilités dans la matrice A et tout ce qui suit dans cet article reste valide.

Il existe une interprétation probabiliste des puissances de la matrice A : l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de A^k est la probabilité de passer de la case i à la case j en k lancers de dé. Donc

$$\lim_{k\to\infty} A^k = O \tag{1.1}$$

est équivalent à dire que, lorsque k tend vers l'infini, la probabilité que la partie soit encore en cours après k tours tend vers zéro.
Nous ferons l'hypothèse que les serpents et les échelles sont disposés de telle sorte que la condition (1.1) soit toujours satisfaite et ainsi les parties sans fin, même si elles ne sont pas impossibles, sont de probabilité zéro. Dans ce cas on dira que le jeu de serpents et échelles est presque sûrement sans partie infinie. Dans la figure (2) on présente un cas où la condition (1.1) n'est pas remplie.

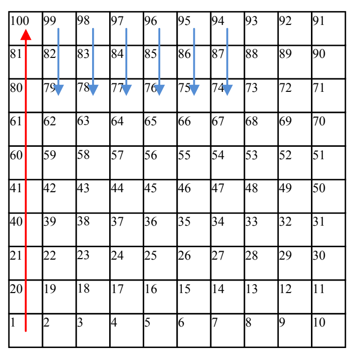


FIGURE 2 – Configuration des serpents et des échelles qui fait en sorte qu'une partie infinie est possible.

D'autre part, on pose P, la *matrice des probabilités* du jeu, comme étant la matrice n par n dont les lignes et les colonnes sont numérotées 0, 1, ..., $n-1$, et telle que p_{ij}, l'élément situé sur la ligne i et la colonne j, est la probabilité de gagner pour le joueur qui se trouve sur la case i lorsqu'il possède le trait et que son adversaire se trouve sur la case j. Or, dans cette même situation, l'univers des possibilités est partitionné par les événements $E, F_0, F_1, \dots F_{n-1}$, où E est l'événement : à l'issue de la partie le joueur en i gagne, et F_k est l'événement : le joueur en i joue de la case i à la case k $(0 \le k \le n-1)$ puis, à l'issue de la partie, son adversaire gagne. La probabilité de E est p_{ij} et la probabilité de F_k est $a_{ik}p_{jk}$. Donc, comme $E, F_0, F_1, \dots F_{n-1}$

est une partition,

$$p_{ij} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} p_{jk} = 1. \tag{1.2}$$

En notation matricielle, l'équation (1.2) devient $P + AP^t = J$, où J est la matrice n par n dont tous les éléments sont des 1. Autrement dit, P est une solution en X de l'équation matricielle

$$X + AX^t = J. \tag{1.3}$$

L'équation (1.3) constitue un système d'équations linéaires qui compte n^2 équations et n^2 inconnues. La matrice X dans (1.3) ne semble pas pouvoir être isolée en utilisant les opérations élémentaires sur les matrices que sont l'addition, la multiplication par un scalaire, la multiplication matricielle, l'inversion de matrice et la transposition. D'autre part, on sait que sous la condition (1.1) il existe au moins une solution en X à l'équation (1.3), cette solution étant constituée des probabilités p_{ij} telles que définies précédemment. Cependant, il reste à étudier la possibilité que (1.3) soit sous-déterminée, c'est-à-dire qu'elle possède plus d'une solution. Cette possibilité est écartée par la proposition suivante.

Proposition 1.1 *Soit A et B deux matrices carrées de même format.*
Si $\lim_{k\to\infty} A^k = O$, alors l'équation matricielle $X + AX^t = B$ possède une et une seule solution en X. Autrement dit, l'application linéaire qui à X associe $X + AX^t$ est inversible.

Démonstration Considérons la version homogène de cette équation, $X + AX^t = O$, et montrons que cette dernière ne possède que la solution nulle. On a alors,

$$\begin{aligned} X &= -AX^t \text{ et } X^t = -XA^t \\ \Rightarrow X &= AXA^t. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est celle d'un point fixe et peut donc être itérée.

$$\begin{aligned} X &= AXA^t \\ \Rightarrow X &= A^2X(A^2)^t \\ &\vdots \\ \Rightarrow X &= A^kX(A^k)^t \\ \Rightarrow X &= \lim_{k\to\infty} A^kX(A^k)^t \\ \Rightarrow X &= O. \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant donne une interprétation de la proposition (1.1) dans le cadre des jeux de serpents et échelles.

Théorème 1.1 *Si A est la matrice caractéristique d'un jeu de serpents et échelles presque sûrement sans partie infinie, alors la matrice des probabilités de ce jeu est l'unique matrice P telle que $P + AP^t = J$.*

Dans les sections suivantes, on donne deux façons de résoudre l'équation (1.3), la première par vectorisation et la deuxième à l'aide d'une série matricielle.

2 Solution par vectorisation

La vectorisation est une transformation linéaire qui transforme une matrice en vecteur colonne. Plus précisément, si X est une matrice m par n, alors la vectorisation de X, notée $vec(X)$, est donnée par

$$vec(X) = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{m1}, x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{m2}, \ldots, x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn})^t,$$

où x_{ij} est l'élément de la matrice X situé sur la ligne i et la colonne j.
Cette opération est reliée de près à une opération appelée le produit de Kronecker. Étant donné deux matrices $X_{m\times n}$ et $Y_{p\times q}$, le produit de Kronecker, noté $X \otimes Y$, est une matrice mp par nq donnée en bloc par

$$X \otimes Y = \left(\begin{array}{c|c|c} x_{11}Y & \ldots & x_{1n}Y \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline x_{m1}Y & \ldots & x_{mn}Y \end{array}\right),$$

où x_{ij} est l'élément de la matrice X situé sur la ligne i et la colonne j.
Alors, on a la relation suivante :

$$vec(XY) = (I_q \otimes X)vec(Y), \tag{2.1}$$

où I_q est la matrice identité d'ordre q. Cette dernière égalité se démontre en observant que la j-ième colonne de XY est XC_j, où C_j est la j-ième colonne de Y. Or,

$$\begin{aligned} vec(XY) &= \left(\begin{array}{c} XC_1 \\ \hline XC_2 \\ \hline \vdots \\ \hline XC_q \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} X & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & X & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & X \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_2 \\ \hline \vdots \\ \hline C_q \end{array}\right) \\ &= (I_q \otimes X)vec(Y). \end{aligned}$$

Puis, pour pouvoir complètement vectoriser l'équation (1.3), il nous faut trouver la matrice de la transformation linéaire que constitue la transposition. Pour ce faire, posons $T^{m,n}$ comme étant la matrice à mn lignes et mn colonnes définie en bloc par

$$T^{m,n} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \delta_{11} & \delta_{21} & \ldots & \delta_{n1} \\ \hline \delta_{12} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{n2} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \delta_{1m} & \delta_{2m} & \ldots & \delta_{nm} \end{array}\right),$$

où δ_{ij} est une matrice à n lignes et m colonnes dont tous les éléments sont nuls sauf celui qui se trouve sur la ligne i et la colonne j qui vaut 1. Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soit X une matrice à m lignes et n colonnes. Alors*

$$vec(X^t) = T^{m,n} vec(X). \tag{2.2}$$

Démonstration Posons

1. x_{ij} comme étant l'élément de la matrice X situé sur la ligne i et la colonne j,
2. L_i comme étant la i-ième ligne de la matrice X,
3. C_j comme étant la j-ième colonne de la matrice X,
4. E_i comme étant la matrice à m lignes et 1 colonne dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i-ième ligne qui vaut 1.

Alors la i-ième colonne de X^t est L_i^t.
De plus, $\delta_{ji} C_j = x_{ij} E_j$, et donc $\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} C_j = L_i^t$. Alors

$$\begin{aligned}
vec(X^t) &= \left(\begin{array}{c} L_1^t \\ \hline L_2^t \\ \hline \vdots \\ \hline L_m^t \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c|c} \delta_{11} & \delta_{21} & \dots & \delta_{n1} \\ \hline \delta_{12} & \delta_{22} & \dots & \delta_{n2} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \delta_{1m} & \delta_{2m} & \dots & \delta_{nm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} C_1 \\ \hline C_2 \\ \hline \vdots \\ \hline C_n \end{array}\right) \\
&= T^{m,n} \otimes vec(X).
\end{aligned}$$

□

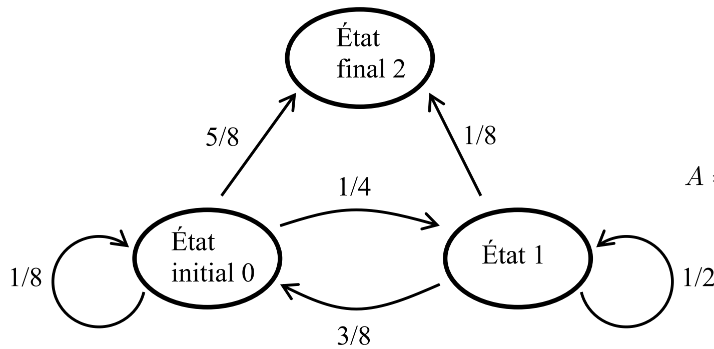
Théorème 2.1 *Si $A_{n\times n}$ est la matrice caractéristique d'un jeu de serpents et échelles presque sûrement sans partie infinie, alors P, la matrice des probabilités de ce jeu, est donnée par $vec(P) = (I_{n^2} + (I_n \otimes A)T^{n,n})^{-1} vec(J)$.*

Démonstration

$$\begin{aligned}
P + AP^t = J \quad &\Rightarrow \quad vec(P + AP^t) = vec(J) \\
&\Rightarrow \quad vec(P) + vec(AP^t) = vec(J) && \text{(car } vec \text{ est linéaire)} \\
&\Rightarrow \quad vec(P) + (I_n \otimes A) vec(P^t) = vec(J) && \text{(par (2.1))} \\
&\Rightarrow \quad vec(P) + (I_n \otimes A) T^{n,n} vec(P) = vec(J) && \text{(par (2.2))} \\
&\Rightarrow \quad (I_{n^2} + (I_n \otimes A)T^{n,n}) vec(P) = vec(J) \\
&\Rightarrow \quad vec(P) = (I_{n^2} + (I_n \otimes A)T^{n,n})^{-1} vec(J).
\end{aligned}$$

Remarquez que la proposition (1.1) nous assure que la matrice $I_{n^2} + (I_n \otimes A)T^{n,n}$ est inversible.
□

Exemple 2 *Considérons le système formé de trois états : 0, 1 et 2. L'état initial est l'état 0, l'état final est l'état 2. Les probabilités de transition sont données dans le diagramme et la matrice caractéristique A suivants.*



$$A = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 \\ 3/8 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ceci n'est pas un jeu de serpents et échelles, mais il peut cependant être étudié de la même façon. Le jeu se déroule de la façon suivante. Les deux joueurs se trouvent initialement dans l'état 0. Les joueurs jouent en alternance, le résultat d'un coup étant déterminé aléatoirement selon les probabilités de transition. Le premier joueur qui atteint l'état final 2 gagne. Alors, par le théorème 2, on trouve que

$$\begin{aligned} vec(P) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/8 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/8 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1192/1683 \\ 184/561 \\ 152/187 \\ 328/561 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, $P = \begin{pmatrix} 1192/1683 & 152/187 \\ 184/561 & 328/561 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,7082 & 0,8128 \\ 0,3280 & 0,5847 \end{pmatrix}$. *En particulier, le premier joueur a environ 71% de chances de gagner lorsque les deux joueurs sont dans l'état initial.*

Le théorème 2 donne la solution P cherchée. Cependant, des considérations pratiques nous amènent à constater que cette solution du système de n^2 équations linéaires à n^2 inconnues est difficilement calculable pour le cas classique $n = 100$. Puisque, dans ce cas, le système d'équations linéaires est formé de 10 000 équations à 10 000 inconnues, la solution exige beaucoup de calculs. Cependant, la méthode présentée dans la section 2 donne la solution exacte par une méthode finie.

3 Solution par série matricielle

Dans cette section, on développe une méthode basée sur un calcul de série matricielle pour résoudre l'équation (1.3). D'un point de vue calculatoire, cette méthode a le défaut d'être infinie. Mais ce défaut s'accompagne de la possibilité de générer sans trop de calculs des approximations convergentes. La série de la proposition suivante a été trouvée par une méthode de point fixe en itérant l'équation (1.3).

Proposition 3.1 *Soit A et B deux matrices carrées de même dimension. Si $\lim_{k\to\infty} A^k = O$ et si B est symétrique, alors la série suivante converge vers une matrice X telle que $X + AX^t = B$.*

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k B (A^k)^t = (I-A)\left(B + ABA^t + A^2B(A^2)^t + \dots\right) \tag{3.1}$$

Démonstration
Posons $U_k = B + ABA^t + A^2B(A^t)^2 + \ldots + A^kB(A^k)^t$ et $V_k = (I-A)U_k$.
Alors $U_{k+1} = B + AU_kA^t = U_k + A^{k+1}B(A^{k+1})^t$ et $U_k^t = U_k$.
Donc,

$$\begin{aligned}
V_k + AV_k^t &= (I-A)U_k + AU_k(I-A^t) && (\text{car } V_k = (I-A)U_k)\\
&= U_k - AU_kA^t\\
&= U_k - (U_{k+1} - B) && (\text{car } U_{k+1} = B + AU_kA^t)\\
&= B - A^{k+1}B(A^{k+1})^t\ . && (\text{car } U_{k+1} = U_k + A^{k+1}B(A^{k+1})^t)
\end{aligned}$$

Or, dans la proposition (1.1), on a montré que l'application linéaire F qui, à la matrice carrée X associe $F(X) = X + AX^t$, est inversible lorsque $\lim_{k\to\infty} A^k = O$. Donc

$$\begin{aligned}
F(V_k) &= B - A^{k+1}B(A^{k+1})^t && (\text{car } V_k + AV_k^t = B - A^{k+1}B(A^{k+1})^t)\\
\Rightarrow V_k &= F^{-1}(B - A^{k+1}B(A^{k+1})^t) && (\text{car } F \text{ est inversible})\\
\Rightarrow lim_{k\to\infty} V_k &= lim_{k\to\infty}(F^{-1}(B - A^{k+1}B(A^{k+1})^t))\\
&= F^{-1}(lim_{k\to\infty}(B - A^{k+1}B(A^{k+1})^t)) && (\text{car } F \text{ est continue})\\
&= F^{-1}(B)\ . && (\text{car } \lim_{k\to\infty} A^k = O)
\end{aligned}$$

Donc la suite matricielle V_k converge vers une matrice X telle que $X = F^{-1}(B)$. Autrement dit, la série converge vers une matrice X telle que $X + AX^t = B$. □

Le théorème suivant donne une interprétation de la proposition 3.1 dans le cadre des jeux de serpents et échelles.

Théorème 3.1 *Si A est la matrice caractéristique d'un jeu de serpents et échelles presque sûrement sans partie infinie, alors P, la matrice des probabilités de ce jeu, est donnée par*

$$P = (I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k J (A^k)^t = (I-A)\left(J + AJA^t + A^2J(A^2)^t + \dots\ \right).$$

Démonstration La matrice P est une solution en X de l'équation $X + AX^t = 0$. Or, par la proposition 1.1, cette équation ne possède qu'une seule solution. D'autre part, la proposition 3.1 affirme que la série converge vers une solution de cette même équation. Donc la série converge vers P. $\square$

Exemple 3 *Considérons le système de l'exemple 2. Alors, le théorème 3.1 donne une approximation de P calculée avec les 6 premiers termes de la série infinie.*

$$P \approx (I - A) \sum_{k=0}^{5} A^k J (A^k)^t \approx \begin{pmatrix} 0,7082 & 0,8128 \\ 0,3280 & 0,5847 \end{pmatrix}.$$

On constate que la réponse trouvée est très près de la matrice trouvée dans l'exemple 2.

On peut donner une interprétation probabiliste à la série du théorème 3.1. Pour ce faire, posons X_k comme étant la matrice n par n dont les lignes et les colonnes sont numérotées 0, 1, …, $n-1$ et telle que l'élément situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité que la partie soit en cours après k tours si elle a débuté avec un joueur possédant le trait sur la case i et son adversaire sur la ligne j. Alors $X_0 = J$ et X_{k+1} égale AX_k si k est pair et à $X_k A^t$ si k est impair. Donc,

$$X_k = \begin{cases} A^m J (A^m)^t, & \text{si } k = 2m \\ A^m J (A^{m-1})^t, & \text{si } k = 2m - 1. \end{cases}$$

De plus, posons P_k comme étant la matrice n par n dont les lignes et les colonnes sont numérotées 0, 1, …, $n-1$ et telle que l'élément situé sur la ligne i et la colonne j est la probabilité que le joueur qui se trouve sur la case i gagne en exactement k tours lorsqu'il possède le trait et que son adversaire se trouve sur la case j. Alors $P_k = X_{k-1} - X_k$ et donc

$$\begin{aligned} P_{2m-1} &= A^{m-1} J (A^{m-1})^t - A^m J (A^{m-1})^t \\ &= A^{m-1} (J - AJ)(A^{m-1})^t \\ &= A^{m-1} (I - A) J (A^{m-1})^t \\ &= (I - A) A^{m-1} J (A^{m-1})^t. \end{aligned} \tag{3.2}$$

De plus,

$$\begin{aligned} P_{2m} &= A^m J (A^{m-1})^t - A^m J (A^m)^t \\ &= A^m (J - AJ)(A^{m-1})^t \\ &= A^m (I - A) J (A^{m-1})^t \\ &= A^m J (A^{m-1})^t (I - A^t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Or, $P = \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m-1}$, car gagner pour celui qui possède le trait nécessite de gagner en un nombre impair de coups. Donc $P = (I - A) \sum_{m=1}^{\infty} A^{m-1} J (A^{m-1})^t$. De plus, à l'aide de (3.2) et (3.3), on montre que

$$AP_k^t = P_{k+1}. \tag{3.4}$$

4 L'équation matricielle des espérances

Étant donné un jeu de serpents et échelles presque sûrement sans partie infinie, on pose E, la *matrice des espérances* du jeu, comme étant la matrice n par n dont les lignes et les colonnes sont numérotées 0, 1, …, $n-1$, et telle que l'élément situé sur la ligne i et la colonne j est l'espérance de la somme des nombres de coups à jouer par les deux joueurs pour finir la partie, si le joueur qui possède le trait est à la case i et que son adversaire se trouve sur la case j. Alors $E = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k$ et

$$
\begin{aligned}
J + AE^t &= J + \sum_{k=1}^{\infty} kAP_k^t \\
&= J + \sum_{k=1}^{\infty} kP_{k+1}, \qquad\qquad (\text{car } AP_k^t = P_{k+1} \ \text{ par } (3.4)) \\
&= J + \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1)P_{k+1} - P_{k+1}) \\
&= J - \sum_{k=1}^{\infty} P_{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)P_{k+1} \\
&= J - (J - P_1) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)P_{k+1} \\
&= P_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)P_{k+1} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} mP_m \\
&= E.
\end{aligned}
$$

Autrement dit, E est une solution en X de l'équation matricielle $X - AX^t = J$. Cette dernière est de la même forme que (1.3) et on peut donc la résoudre en appliquant les techniques des sections 2 et 3.

Théorème 4.1 *Si $A_{n\times n}$ est la matrice caractéristique d'un jeu de serpents et échelles presque sûrement sans partie infinie, alors E, la matrice des espérances de ce jeu, est donnée par*

$$vec(E) = (I_{n^2} - (I_n \otimes A)T^{n,n})^{-1} vec(J)$$

ou

$$E = (I + A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k J (A^k)^t = (I + A) \left(J + AJA^t + A^2 J (A^2)^t + \dots \right),$$

où J est la matrice n par n dont tous les éléments sont des 1.

Exemple 4 *Considérons le système de l'exemple 2. Alors, le théorème 4.1 donne E par vectorisation et par approximation calculée avec les 6 premiers termes de la série infinie.*

$$\begin{aligned} vec(P) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/8 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3/8 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/8 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 664/363 \\ 1048/363 \\ 872/363 \\ 504/121 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, $E = \begin{pmatrix} 664/363 & 872/363 \\ 1048/363 & 504/121 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,8292 & 2,4022 \\ 2,8871 & 4,1653 \end{pmatrix}$
et $E \approx (I + A) \sum_{k=0}^{5} A^k J (A^k)^t \approx \begin{pmatrix} 1,8252 & 2,3935 \\ 2,8784 & 4,1463 \end{pmatrix}$.

5 Les probabilités et les espérances dans le cas classique

Sans être l'inventeur du jeu de serpents et échelles, on doit à Milton Bradley la configuration classique des serpents et échelles pour leur jeu *Chutes and Ladders* paru en 1952. Depuis, cette configuration a été reprise par un grand nombre de compagnies. Il existe quelques variations des règlements. Dans notre cas, nous appliquons la règle qui veut qu'il ne soit pas nécessaire d'obtenir exactement le bon nombre pour finir la partie. Par exemple, $a_{99\ i} = 0$ pour $i = 0, \ldots, 99$, puisqu'un coup à partir de la case 99 est assuré d'emmener le pion sur la case 100. La figure 3 donne un résumé de la matrice P obtenue numériquement à l'aide du théorème 3.1.

	0	1	2	3	…	50	51	52	53	…	96	97	98	99
0	0.509	0.520	0.517	0.508	…	0.319	0.340	0.335	0.329	…	0.042	0.036	0.000	0.000
1	0.498	0.509	0.506	0.497	…	0.309	0.329	0.325	0.319	…	0.041	0.035	0.000	0.000
2	0.501	0.512	0.509	0.500	…	0.312	0.332	0.328	0.321	…	0.041	0.035	0.000	0.000
3	0.509	0.520	0.517	0.509	…	0.319	0.340	0.335	0.328	…	0.042	0.036	0.000	0.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
50	0.696	0.706	0.703	0.697	…	0.513	0.540	0.533	0.523	…	0.069	0.059	0.000	0.000
51	0.676	0.686	0.684	0.677	…	0.486	0.513	0.506	0.496	…	0.065	0.055	0.000	0.000
52	0.681	0.691	0.688	0.681	…	0.493	0.521	0.513	0.503	…	0.066	0.056	0.000	0.000
53	0.687	0.697	0.694	0.687	…	0.503	0.531	0.523	0.514	…	0.068	0.058	0.000	0.000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
96	0.960	0.961	0.961	0.960	…	0.935	0.940	0.939	0.937	…	0.673	0.618	0.551	0.500
97	0.966	0.967	0.967	0.966	…	0.945	0.949	0.948	0.947	…	0.776	0.742	0.699	0.667
98	1.000	1.000	1.000	1.000	…	1.000	1.000	1.000	1.000	…	0.917	0.889	0.861	0.833
99	1.000	1.000	1.000	1.000	…	1.000	1.000	1.000	1.000	…	1.000	1.000	1.000	1.000

FIGURE 3 – Un extrait de la matrice P dans le cas classique

On constate que le premier joueur possède un faible avantage sur le second : $a_{0\ 0} = 0.509$. De plus, si les joueurs commencent leur partie sur les cases 2 et 3 et que le premier à jouer se trouve sur la case 2, alors la partie est beaucoup plus équilibrée : $a_{2\ 3} = 0.500$. Un autre fait surprenant est que si les joueurs commencent leur partie sur les cases 0 et 50, avec le trait pour le joueur sur la case 0, alors le joueur sur la case 0 a toujours 31,9% de chances de gagner : $a_{0\ 50} = 0.319$. La valeur p_{ij} est généralement croissante en i et généralement décroissante en j. Cependant, il y a des exceptions remarquables à cela. Par exemple, lorsque notre adversaire est sur la case 91 et qu'on possède le trait, alors nos chances de gagner sont presque deux fois plus grandes si on se trouve sur la case 74 plutôt que sur la case 81 : $p_{74\ 91} = 0.494$, $p_{81\ 91} = 0.250$. Cela se comprend intuitivement si on remarque que lorsqu'on se trouve sur la case 74, on peut espérer gagner en prenant l'échelle de la case 80, alors que lorsqu'on se trouve sur la case 81 cette échelle n'est plus accessible.
La figure 4 donne un résumé de la matrice E obtenue numériquement à l'aide du théorème 4.1.

	0	1	2	3	…	50	51	52	53	…	96	97	98	99
0	47.76	48.38	48.21	47.76	…	36.35	37.94	37.57	37.06	…	7.58	6.51	2.33	2.00
1	48.40	49.04	48.86	48.40	…	36.75	38.37	37.99	37.47	…	7.64	6.56	2.33	2.00
2	48.23	48.86	48.68	48.23	…	36.64	38.25	37.87	37.36	…	7.62	6.54	2.33	2.00
3	47.76	48.38	48.21	47.76	…	36.35	37.95	37.57	37.06	…	7.58	6.51	2.33	2.00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
50	35.97	36.35	36.25	35.97	…	28.72	29.84	29.58	29.22	…	6.57	5.65	2.33	2.00
51	37.60	38.01	37.90	37.61	…	29.90	31.08	30.80	30.42	…	6.73	5.79	2.33	2.00
52	37.22	37.62	37.51	37.23	…	29.62	30.78	30.51	30.14	…	6.69	5.75	2.33	2.00
53	36.70	37.09	36.99	36.70	…	29.24	30.39	30.12	29.76	…	6.64	5.71	2.33	2.00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
96	6.67	6.72	6.70	6.67	…	5.70	5.86	5.82	5.77	…	2.36	2.16	1.62	1.50
97	5.58	5.62	5.61	5.58	…	4.76	4.89	4.86	4.82	…	2.00	1.85	1.41	1.33
98	1.33	1.33	1.33	1.33	…	1.33	1.33	1.33	1.33	…	1.25	1.22	1.19	1.17
99	1.00	1.00	1.00	1.00	…	1.00	1.00	1.00	1.00	…	1.00	1.00	1.00	1.00

FIGURE 4 – Un extrait de la matrice E dans le cas classique

On constate qu'une partie à deux joueurs se termine en moyenne en $e_{00} = 47{,}76$ coups. La valeur e_{ij} est généralement croissante en i et généralement décroissante en j. Cependant, il y a des exceptions remarquables à cela. Par exemple, lorsque notre adversaire est sur la case 91 et qu'on possède le trait, alors l'espérance du nombre de coups à jouer pour finir la partie est 9,71 si on se trouve sur la case 74 alors qu'elle est de 13,23 si on se trouve sur la case 81. Cela se comprend intuitivement si on remarque que lorsqu'on se trouve sur la case 74, on peut espérer gagner en prenant l'échelle de la case 80, alors que lorsqu'on se trouve sur la case 81 cette échelle n'est plus accessible.

6 Conclusion

Certains auteurs [1] ont étudié le jeu de serpents et échelles comme une chaîne de Markov classique. Cependant, l'analyse faite est celle d'une version du jeu à un seul joueur. L'aspect possiblement nouveau du présent texte est son étude du cas à deux joueurs. On constate que la version à deux joueurs, tout comme celle à un joueur, est un problème d'algèbre linéaire. En fait, la technique utilisée dans cet article peut s'appliquer à n'importe quel jeu à deux joueurs qui se présente comme une chaîne de Markov. En particulier, ces jeux doivent être des jeux de pur hasard. C'est-à-dire qu'ils ne doivent pas nécessiter de prise de décision des joueurs. Nous travaillons présentement sur une généralisation dans laquelle les joueurs ont des décisions à prendre.

Référence

[1] Althoen, S. C., King L. et Schilling K. (1993). How Long is a Game of Snakes and Ladders ?, *The Mathematical Gazette*, vol. 77, no 478, 71-76.