La fuerza del azar.
Entre la probabilidad y la incertidumbre

JAVIER DEL REY

Madrid, 2016

Sede Social: c/ Abada, 2 5º 4-A
28013 Madrid
Depósito Legal: M-41300-2016
Maquetación: A.D.I. Pza. de Argüelles, 7. 28008 Madrid. Telf.: 91542 82 82

La fuerza del azar.
Entre la probabilidad y la incertidumbre

(Conferencia pronunciada en la universidad de mayores experiencia recíproca el día 13 de octubre de 2016)

Esta charla pretende mostrar algunas curiosidades sobre la ciencia del azar y la probabilidad desde un punto de vista básico, sin pretensiones de alto rigor científico ni de abarcar la totalidad de los temas. Sólo se trata de plantear algunas cuestiones que espero resulten de interés.

Para explicar lo que es el azar, lo indeterminado, lo impredecible, casi siempre se habla de su contrario, lo determinado, lo predecible. Una de las cosas que veremos es que estos dos contrarios suelen ir de compañeros más a menudo de lo que por sus nombres podría esperarse.

Ya más de veinte siglos atrás se les presentaba juntos cuando Demócrito afirmaba: "Todo lo que existe es fruto del azar o de la necesidad". Interpretando a Demócrito diríamos que en la naturaleza tanto actúa la fuerza del azar, lo imprevisible, como la del destino, lo que necesariamente ha de ocurrir.

Y esta división de fuerzas entre lo determinado y el azar parece mantenerse hoy en día. Cuando en los textos de introducción a la teoría de la probabilidad se pretende explicar en qué consiste el azar, por lo general, se recurre a la comparación entre dos clases de fenómenos en la naturaleza. Unos se caracterizan por el hecho de que siempre que se da cierta situación inicial, se produce el mismo resultado final que, por tanto, se puede predecir. Se les llama fenómenos deterministas. Y otros, llamados aleatorios o indeterminados, en los que aunque la situación inicial sea la misma, el resultado final puede ser muy distinto. Entre los deterministas están los movimientos mecánicos, la gravitación, el movimiento de los planetas y las interacciones electromagnéticas. Entre los aleatorios o azarosos están, por ejemplo: los terremotos y volcanes, el rayo y la meteorología y todo lo relacionado con los juegos de azar: dados, ruletas, etc.

Parece que así quedan aclaradas las cosas. De una parte está el territorio donde mandan las leyes deterministas y de otra lo indeterminado, que es el reino del azar. Pero a poco que se le dé vueltas a este planteamiento surgen algunas cuestiones.

Laplace

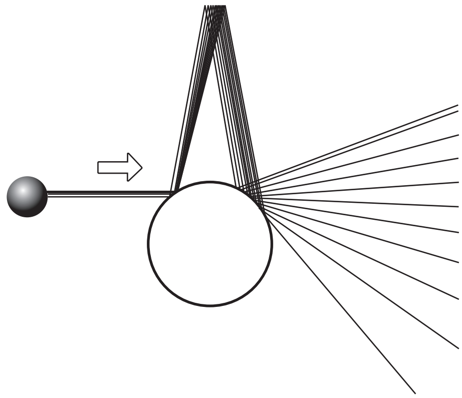
Al filósofo y matemático Pierre Simon de Laplace, siglo XVIII, se le considera el más representativo de los filósofos deterministas. Para él: "la sana filosofía no ve en el azar más que la expresión de la ignorancia en la que estamos y no las verdaderas causas".

Para Laplace el azar no existe. Lo que ocurre es que desconocemos las verdaderas causas de los llamados fenómenos aleatorios. No es que los terremotos y las erupciones volcánicas surjan por azar, es que nuestro conocimiento de la dinámica interna de la Tierra es muy deficiente y por eso no podemos predecirlos. Si supiéramos con precisión el estado de tensión de las placas tectónicas y los movimientos del magma sobre el que yacen, podría predecirse cuándo y dónde va a ocurrir un terremoto.

Según este punto de vista, hablamos de azar porque desconocemos las condiciones sobre las que actúan unas leyes que no dependen del azar. Desde esta perspectiva, el azar es sólo falta de información. El azar es la máscara de nuestra ignorancia.

Poincaré

Escuchemos a otro filósofo y científico, ya en el siglo XX. Henri Poincaré también defiende el determinismo a todo trance. Para él, lo esencial del azar es que se produce siempre en situaciones en las que, a pequeñas causas corresponden grandes efectos. Un pequeñísimo impulso de más a la bola en la ruleta o un pequeño temblor de la mano al tirar el dado, y sale un número distinto. El azar se reduce a lo que hoy se llama popularmente "efecto mariposa" y que más técnicamente llamamos "sensibilidad a las condiciones iniciales".



Podemos comprender el efecto mariposa imaginando el movimiento de una bola de billar. Si lanzamos la bola contra un obstáculo central ¿a qué punto del lado opuesto llegará después de rebotar contra la banda y contra otros obstáculos? Las leyes del choque entre cuerpos determinan el ángulo de salida para un ángulo de incidencia determinado, por lo cual la bola seguirá una trayectoria perfectamente determinada. Pero resulta que cualquier diferencia en la dirección inicial de la bola, por pequeña que sea, provocará cambios de dirección importantes. Supongamos que después de lanzar una bola y observar su trayectoria, lanzamos otra, dándole el mismo impulso inicial por una trayectoria paralela a la anterior y muy cercana a ella. Tan cercana que sería aparentemente indistinguible. Sin embargo, su trayectoria se irá separando de la que siguió la primera bola, amplificándose la separación en cada choque. El resultado es que, a pequeñísimas diferencias en las posiciones iniciales, corresponden enormes diferencias en las posiciones finales. No sabemos a dónde llegará la bola. Esto es el efecto mariposa.

Conclusión: aunque no haya azar en el movimiento de la bola, el resultado es como si lo hubiera. No hay forma de predecir. Determinismo no significa predecibilidad. Y cuando no podemos predecir, hablamos de azar.

Heisenberg

El punto de vista de Poincaré, que falleció en 1912, es anterior al principio de indeterminación de Heisenberg, que fue publicado en 1927. La interpretación más extendida de este principio sostiene que en el átomo gobierna un azar irreductible. Sólo por azar ocurre que, en un momento dado, un átomo emite un paquete de luz, que llamamos fotón, y sólo por azar lo emite en una dirección y no en otra. Las leyes del átomo recogen las medias estadísticas de esa indeterminación. Para Heisenberg, el mundo atómico es intrínsecamente indeterminista. En el átomo domina el azar.

Kolmogorov

Otra opinión sobre lo que es el azar nos la da Kolmogorov, en el siglo XX. Él es el autor de la moderna teoría de la probabilidad. Antes de decidir qué es el azar se plantea un problema concreto: "¿Cuándo se puede decir que una secuencia de números es determinista? y ¿cuándo que ha sido generada al azar?" Y aventura la respuesta: "Cuando hay pautas que permiten comprimir toda la secuencia en una fórmula". Así, en vez de escribir una secuencia como 1212121212…etc., enunciamos la fórmula: "repetir indefinidamente 12". En cambio en la secuencia 52144353162521311643… no se encontrará ninguna pauta, porque se obtuvo tirando un dado. No hay pauta que permita repetirla. Tampoco vale volver a tirar el dado. No hay fórmula que la resuma, salvo que la fórmula sea la propia secuencia. Conclusión: lo importante del azar es la ausencia de pautas, la imposibilidad de resumir.

Resumiendo: ¿qué es el azar?, ¿cuál es su fundamento? ¿Impredecibilidad?, ¿falta de información?, ¿indeterminismo?, ¿efecto mariposa?, ¿ausencia de pautas?… Dejo estas preguntas en suspenso, que aún sin contestar nos enseñan algo sobre el azar. Porque, más que la cuestión de la esencia del azar en sí, me interesa otra cuestión: ¿en qué consiste la experiencia del azar?, ¿cómo nos afecta a los humanos? y sobre todo ¿cómo nos las arreglamos en nuestro trato con el azar?

La experiencia del azar es por lo general incómoda. En el azar tenemos la impresión de que las cosas ocurren sin causa aparente. Hay una tendencia profunda en nuestra psicología que quisiera eliminarlo, porque el mundo parece más inteligible si podemos conocer las causas de todos los efectos, cosa que no ocurre en el azar. Explicar una cosa es mostrar sus causas. Un mundo azaroso es un mundo inexplicado. Y además inquietante, pues en el azar las cosas parecen ocurrir sin causa aparente. Centrándonos en la vivencia del azar nos encontramos con que el azar nos resta comodidad, inteligibilidad y quietud. ¿Qué hacemos ante esto los humanos? ¿Cómo nos las arreglamos en nuestro trato con el azar?

A lo largo de su historia, el hombre se da cuenta del poder del azar y de que su seguridad depende, en gran medida, de acontecimientos fortuitos de enorme gravedad que no puede controlar. Por eso creo que lo más importante de nuestra vivencia del azar es el deseo de controlarlo, de no sentirnos desamparados ante acontecimientos impredecibles.

Y ¿qué hacer para controlar el azar? ¿No hay aquí una contradicción? ¿No es el azar, por su impredecibilidad, algo perfectamente incontrolable? Pues no debe de ser totalmente incontrolable, cuando la humanidad viene haciendo, desde tiempos antiguos, al menos cinco cosas en las que encuentra cierto alivio en su trato con el azar.

1. Interpretar el azar
2. Rendir culto a los dioses de la buena suerte
3. Jugar con el azar
4. Calcular probabilidades
5. Rentabilizar el azar

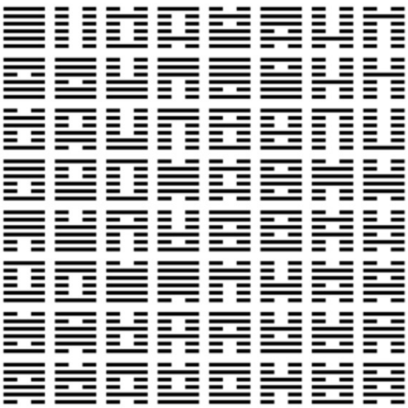
1. Interpretar el azar

Hemos visto ya varias interpretaciones modernas que hacen científicos como Laplace, Poincaré, Heisenberg y Kolmogorov.

La interpretación del mundo antiguo es ver en el azar el medio del que se valen los dioses para hablar con los hombres: el oráculo. La voluntad de los dioses o el destino se manifiesta, por ejemplo, en las grietas que se forman por azar en los caparazones de tortuga al calentarlos al fuego y que se interpretan para tomar decisiones. (China año 1500 a. C).

La configuración de las cenizas, el humo, el vuelo de los pájaros, los posos del café o del té, el estado de las vísceras de las víctimas sacrificadas a los dioses no se consideran un azar trivial, sino la expresión de un mensaje. El destino que habla por medio del azar.

El *I-Ching* es un libro chino de oráculos, cuyos primeros antecedentes se remontan a más de 4000 años. La versión más difundida fue fijada en tiempos de Confucio (siglo VI a. C.). Para consultar en el libro, se formula una pregunta relacionada con la vida personal del consultante y se arrojan tres monedas. Si el número de caras es par, se traza una raya continua. Si es impar, una raya partida. Las monedas se tiran 6 veces y así se dibuja de abajo a arriba un conjunto de seis rayas, continuas o partidas, que se llama el hexagrama.



Sólo hay 64 hexagramas posibles que están recogidos en el libro, cada uno con su nombre y con el texto del oráculo que corresponde. Por ejemplo, en el hexagrama "La marcha" el texto dice así: "La cola del tigre no muerde al hombre. Puedes caminar sobre ella. El más fuerte y el más débil están estrechamente atados. El fuerte no hiere al débil, porque su contacto lo pone de buen humor y lo hace inofensivo. Los modales agradables a menudo triunfan con la gente irritable". Puede ser necesario un mediador para obtener una interpretación del texto adecuada a la pregunta que se hizo.

La interpretación de hechos de azar como oráculo implica claramente una negación del azar. No hay tal azar. Es su contrario, el destino, el que se nos muestra a través del azar. Y no creamos que en nuestro tiempo estamos muy lejos de éstas interpretaciones. Nos basta recordar que alguna vez, ante un hecho fortuito, azaroso en parte o en su totalidad, oímos comentar: “Lo ocurrido es un castigo (o un premio) de Dios”.

La literatura clásica también interpreta el azar de maneras varias. Una de ellas aparece en la conocida tragedia romántica: *Don Álvaro o la fuerza del sino*. Por azar el padre de Leonor sorprende a su hija y a don Álvaro cuando intentan huir. Don Álvaro arroja la pistola al suelo en señal de sumisión, pero, por azar, la pistola se dispara al golpear el suelo y, por azar, el tiro mata al padre de su amada, haciendo inevitable la tragedia. El espectador queda convencido de que la fuerza de un destino aciago destruye a don Álvaro y a todo lo que ama, pero ese destino actúa por medio del azar. Algo semejante se encontrará en la tragedia de *Edipo Rey*. Frecuentemente en la literatura clásica encontramos a la fuerza del azar y la del destino caminando de la mano.

Interpretar el azar nos aporta una orientación, pero es más interesante poner el azar de nuestro lado. Por eso es bueno:

2. Rendir culto a los dioses que administran la buena suerte

En la mitología hindú, Lakshmi, consorte eterna del dios Visnú, es la diosa de la buena suerte que proporciona riqueza, amor, belleza y felicidad. Se la representa, generalmente, sobre una flor de loto, con cuatro brazos sosteniendo flores de loto y dejando caer monedas de oro. A veces va escoltada de dos elefantes blancos, símbolos de la riqueza.

De la antigüedad griega y romana nos llega el mito de la diosa Fortuna. Sus alas aluden a la rapidez con que viene y se va. El cuerno de la abundancia muestra la generosidad de sus dones. También se la representa gobernando una rueda para indicar la variabilidad de sus caprichos o un timón para mostrar su poder sobre el rumbo de los humanos.

Hoy en día se sigue dando culto a la diosa Fortuna de forma modificada por el actual entorno cultural. Nuestros sacrificios modernos a la diosa Fortuna consisten en comprar lotería, tirar monedas a un pozo, apagar de un solo soplo todas las velas de una tarta y evitar las cosas que, como todo el mundo sabe, traen mala suerte, tales como romper espejos o abrir paraguas dentro de casa.

Cuentan del físico Niels Bohr, pionero de la moderna teoría atómica, que tenía una herradura en la puerta de su casa. Cuando alguien le preguntó si realmente creía que las herraduras traían buena suerte, contestó: "No, pero me han dicho que dan suerte incluso a los que no creen en ellas". Me permito interpretar que a Niels Bohr le pasaba lo que a algunos de nosotros: no creemos en los dioses de la suerte, pero les rendimos culto.

3. Jugar con el azar

Realmente, jugando con el azar no se le controla. Es al revés, el azar nos controla en el juego. Pero solo es un juego. Y además, se puede tomar como un descanso de ese otro azar, muchas veces dramático, que nos gobierna en la vida real. Se trata de intentar vivir, sin mucho daño y tal vez con algún beneficio, la experiencia que produce el azar, el placer de sumergirse en él, de dejarse arrastrar. ¿Por qué no, de vez en cuando, entregarnos a la pereza y, en lugar de afrontar la dura lucha diaria por ganarnos la vida, permitir que sea el azar el que nos la gane? ¿Por qué no, dar una oportunidad al azar? Tal vez hoy sea mi día de suerte… mientras el azar trabaje para mí, no necesito controlarlo.

Es obligado citar, hablando del azar, el tema del juego, pero no voy a desarrollarlo. Habría que hablar con rigor y con información actualizada de la poderosa industria del juego y de las políticas gubernamentales que la rodean. Y también de la psicología de los profesionales del azar, regentes de casinos y corredores de apuestas y de los trucos que utilizan para seducir y captar clientes. De la enorme extensión que ha alcanzado el juego a través de Internet y de las víctimas de los juegos de azar, que pretenden ganarse la vida jugando con suerte incierta y cayendo en muchos casos en la ruina y en la ludopatía. Todo requeriría mucho más tiempo del que disponemos aquí.

Sí señalaré, que a los que juegan con el azar les interesa conocer el cálculo de probabilidades. Tener en cuenta las probabilidades sí que es una forma de controlar nuestra experiencia con el azar.

4. Calcular probabilidades

Históricamente, los primeros avances en el conocimiento de la probabilidad llegaron con el estudio de los juegos de azar, porque en la continua relación con lo fortuito que proporcionan los juegos de azar, un conocimiento elemental se acaba imponiendo. Y es que, con toda evidencia, algunos resultados aparecen más fácilmente que otros. Cualquiera puede observar que es más fácil sacar dos 6 al tirar dos dados, que sacar cinco 6 al tirar cinco dados. Más fácil quiere decir que al repetir el experimento ocurre más veces. Es más frecuente. Esa idea de facilidad o dificultad en lo que depende del azar es el origen de lo que hoy llamamos probabilidad.

Surge, en principio, como un concepto comparativo. Un suceso es más o menos fácil, más o menos frecuente que otro; es decir, un suceso tiene más o menos probabilidad que otro. Por ejemplo, en los primeros tiempos de la teoría de la probabilidad, pensando en posibles apuestas, se hacían preguntas como ésta: ¿Qué es más fácil: obtener un 6 al tirar seis dados o dos 6 al tirar doce dados? (Las matemáticas de la probabilidad demuestran que hay una notable diferencia, 40,2% lo primero frente a lo segundo, 29,6%). Y al lanzar tres dados ¿qué es más conveniente? ¿apostar a que sumen 9 ó a que sumen 10? (Por poca diferencia es más probable lo segundo) Más adelante se trató de encontrar un número que sirviera como medida precisa de esa dificultad o facilidad. A ese número se le llama probabilidad del suceso en cuestión. Calcularlo, medir probabilidades, es el principal objetivo de las ciencias relacionadas con el azar.

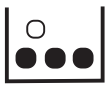
Pero la palabra probabilidad se utiliza con otro sentido en el lenguaje corriente; por ejemplo, cuando oímos decir: “probablemente ese testigo miente”, “probablemente esa persona te está tomando el pelo”, “probablemente tus acciones subirán”. En estas expresiones, el significado de la palabra “probablemente” no va más allá de “es posible que” o “tal vez”.

Se suele llamar probabilidad subjetiva a este uso de la palabra, porque su valor depende de la información que tiene el sujeto que hace la afirmación. Yo puedo tener indicios para pensar que tal vez cierto testigo miente, pero ese testigo sabe si miente o no. Lo que para mí es posible, para él es totalmente seguro. Si se pudieran calcular este tipo de probabilidades, la teoría de la probabilidad se transformaría en la guía principal del comportamiento individual y social. Pero dejaremos este tipo de probabilidades para dedicarnos a las que sí se pueden calcular. Hasta el siglo XVI no se dieron pasos precisos para medir probabilidades. Esto se hizo de dos maneras distintas, una deductiva y otra inductiva.

4.1. *Método deductivo de calcular probabilidades*

Una primera forma de medir la probabilidad es buscar simetrías en los posibles resultados de un experimento antes de realizarlo y deducir a partir de ellas un valor para esa probabilidad. Por ejemplo, antes de lanzar una moneda, nada hay que nos permita decir que uno de los lados va a ser más favorecido que el otro. Así que diremos que cada lado tiene una probabilidad del 50 %, o sea p=1/2. Intuitivamente sacaremos además la conclusión práctica de que, al repetir muchas veces el experimento, saldrá cara, por término medio, una de cada dos veces.

Otro ejemplo: en una urna tenemos 1 bola blanca y 3 negras, que sólo se diferencian en el color. ¿Qué probabilidad tiene cada color al sacar 1 bola al azar?



P(bola blanca)=1/4=0,25=25%
P(bola negra)=3/4=0,75=75%

Por la simetría del problema, a la blanca le asignamos una probabilidad de 1/4. Y la probabilidad de sacar negra será el triple que la de sacar blanca, 3/4. Estamos expresando así la probabilidad con un número entre 0 y 1. El 0 sería la probabilidad de lo que es imposible (sacar una bola roja) y el 1 de lo que es totalmente seguro (sacar una bola).

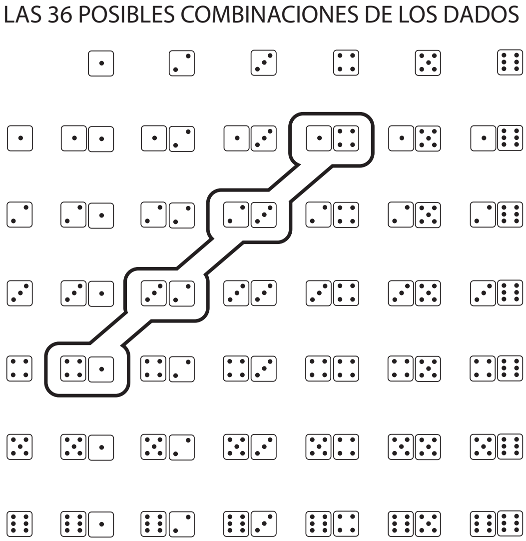
4.2. *Regla de Laplace*

Pensando de esta manera se llega a una regla para calcular la probabilidad, que lleva el nombre del matemático que la formuló con más exactitud, Pierre Simón de Laplace (siglo XVIII), aunque antes de él la usaron Galileo y Cardano y sin duda otros, cuyo pensamiento no llegó escrito hasta nosotros.

Dice así la regla de Laplace: "La probabilidad de un suceso es igual al número de casos favorables dividido entre el número de casos posibles". Y hay que añadir por precaución: siempre que haya simetría entre todos los casos posibles.

Así, al tirar un dado, siempre que el dado esté bien construido como un cubo perfecto (todas las caras iguales, todas las aristas iguales y todos los vértices con el mismo aspecto) la probabilidad de sacar un 5 será de 1/6 = 0,1666… =16,6%

Al tirar 2 dados, los casos posibles se muestran en la figura:



En total 36 casos. Sólo en 4 de esos casos los dados suman 5, que son: (4,1) (3,2) (2,3) (1,4). Así, la probabilidad de sumar 5 al tirar 2 dados será de 4/36=1/9.

Pero, en general el uso de la regla de Laplace no es nada fácil y las estimaciones frecuentemente se hacen mal. El cálculo de probabilidades con esta regla, salvo en casos muy simples, requiere andar con pies de plomo. Eminentes matemáticos han metido la pata en problemas aparentemente sencillos y es razonable ser indulgentes con ellos. Vayan a modo de anécdota algunos ejemplos.

4.3. *Votación de la CUP en diciembre de 2015*

Una propuesta sometida a votación interna entre 3.030 militantes del partido político catalán CUP, que tuvo lugar el 27 de diciembre de 2015, obtuvo 1.515 votos a favor y 1.515 en contra. Inmediatamente se abrió un debate en la red social Twitter en el que, entre otros, algún profesor de Universidad sostuvo que ese empate era un suceso prácticamente imposible por la baja probabilidad del resultado que él calculaba en 0,0003, insinuando así que el empate había sido amañado.

El razonamiento, erróneo, era el siguiente: suponiendo una votación al azar, los resultados posibles eran los siguientes: 3.030 a favor, 0 en contra; 3.029 a favor, 1 en contra; 3.028 a favor, 2 en contra; etc. hasta llegar a: 0 a favor, 3.030 en contra. Casos posibles: 3.031. Casos favorables: 1 (el empate a 1515). Por tanto, la probabilidad de empate sería 1/3.031= 0,00033.

Para ilustrar dónde está el error de este razonamiento, supongamos que en vez de 3.030 votantes sólo hay 2 que tienen que votar a favor o en contra de cierta propuesta. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca el empate, suponiendo que se vota al azar?

Resultados posibles de la votación: (0-2) (1,1 empate) y (2,0). Siendo el primer número del paréntesis los votos a favor y el segundo los votos en contra. Los que razonaron mal lo hicieron de esta forma: casos posibles 3, casos favorables al empate 1. Probabilidad del empate= 1/3.

Pero para razonar correctamente hay que tener en cuenta que no hay 3 sino 4 casos posibles. Dos personas A y B votan sí o no. Los resultados posibles son (N, N) (N, S) (S, N) (S, S). No es lo mismo que A vote no y B sí, o que A vote sí y B no. Y en ambos casos se produce el empate. Por tanto, hay 2 casos favorables y 4 posibles. Probabilidad del empate=2/4= ½

Para hacer bien las cuentas con 3.030 votantes hay que utilizar una técnica llamada combinatoria, con la que resulta una probabilidad de aproximadamente 1,45%. Esta probabilidad es 44 veces mayor que la primeramente señalada. Sin ser muy elevada permite aceptar que no hubo trampa en el empate. El error fue que, al aplicar la regla de Laplace, se consideraron igualmente posibles casos que no lo eran.

4.4. *El sorteo de excedentes de cupo de la mili de 1997*

En el caso de la CUP, media hora después de publicarse en Twitter el razonamiento erróneo, se publicaban otros twits con el cálculo correcto. Los comentarios de prensa sobre el asunto no fueron más allá de los dos días siguientes. En cambio, el cálculo correcto y completo sobre el sorteo de la mili tardó tres meses en publicarse, y en la prensa la polémica duró más de un mes.

El sorteo fue el 12 de noviembre de 1997. Se realizó de la siguiente manera: en primer lugar un ordenador asignó un número, aleatoriamente, a cada uno de los 165.342 jóvenes llamados a filas. Después, mediante extracción de bolas de 6 bombos, se obtuvo un número que resultó ser el 155.611. Los mozos que tenían ese número, o cualquiera de los 16.441 siguientes fueron declarados excedentes de cupo.

La polémica se desató cuando dos estudiantes de estadística llamaron la atención sobre un hecho que era completamente cierto: la forma de extracción de bolas en los bombos no daba las mismas probabilidades a todos los 165.342 números. Esto era así, entre otras razones, porque el primer bombo tenía cinco bolas con el 0 y cinco con el 1, con lo cual, los números entre 000001 y 099999, se repartían las mismas posibilidades que los números entre 100.000 y 165.342. De esta manera, al ser menos estos últimos resultaban más favorecidos, esto es, eran más probables. De ahí se sacó la conclusión (que luego se demostró ser errónea) de que no hubo igualdad de oportunidades y había que anular el sorteo. En el mismo sentido que los estudiantes, varios profesores publicaron sus conclusiones con gráficos y cifras (que luego también se demostrarían erróneos), reclamando la nulidad del proceso.

El Ministerio de Defensa, responsable de la organización del sorteo, aceptó que el sistema de los bombos estuvo mal planteado, pero sin embargo argumentó: "…puesto que los números asignados previamente a cada joven se repartieron al azar, todos tuvieron la misma probabilidad de salir excedentes de cupo". Y era cierto, porque todos tuvieron la misma probabilidad de que, en la asignación previa, les hubiera tocado el número que luego salió en el sorteo de los bombos o alguno de los 16.441 siguientes. Y esa probabilidad se obtenía aplicando la regla de Laplace: 16.441/165.342 = 0,0994, el 9,9 %. Lamentablemente el Ministerio de Defensa no supo explicarlo bien y no consiguió convencer. Posiblemente, la pasión política se sobrepuso a la objetividad matemática.

Para aclarar dónde estuvo la confusión propongo a vuestra reflexión un problema análogo más sencillo. Se sortea un premio entre Ana (A) y Beatriz (B) de la siguiente manera: en primer lugar se tira una moneda, si sale cara, A recibe 99 papeletas de una lotería de 100 números y B 1 papeleta, si sale cruz, el reparto se hace al revés: A recibe 1 y B 99 papeletas. A continuación se sortea la lotería con un bombo de 100 bolas numeradas. ¿Quién tiene más probabilidad de obtener el premio? Las reglas del cálculo de probabilidades obligan a sumar la probabilidad que tiene A de ganar cuando sale cara más la probabilidad de ganar cuando sale cruz. El resultado es $P=1/2x99/100+1/2x1/100= 1/2$. Las dos tienen la misma probabilidad de ganar. El hecho de que el sorteo del bombo estuviera desequilibrado no rompe la igualdad de oportunidades otorgada por la tirada previa de la moneda.

El gobierno tenía los argumentos correctos, pero al parecer no supo utilizarlos mediáticamente y perdió la batalla de la prensa, donde predominaba la opinión de que no hubo igualdad de oportunidades. Tras un mes de intensa polémica y la presentación de 72 recursos contra el sorteo ante el Ministerio de Defensa, el 9 de diciembre se debatió en el pleno de las Cortes una propuesta del grupo socialista que exigía repetir el sorteo. La propuesta fue rechazada por 159 votos a favor y 160 en contra.

Además de sus señorías, metieron la pata los firmantes de artículos y editoriales de importantes periódicos de tirada nacional y otros muchos periódicos regionales, un buen número de profesores de matemáticas y, por supuesto, los asesores del Ministerio de Defensa, que diseñaron el proceso de extracción de números de los bombos que fue lo que desencadenó la confusión.

La prensa abandonó la polémica poco después de la votación del Congreso sin publicar conclusiones y sin que nadie se retractara de sus afirmaciones. En febrero de 1998 se publicó en una revista especializada y de escasa difusión entre el público un estudio matemático, demostrando de forma irrebatible la igualdad de oportunidades que tuvieron todos los convocados, a pesar de los errores del sorteo. Consultando en Internet se puede comprobar que la confusión subsiste todavía hoy en páginas web que defienden las tesis erróneas.

Como vemos, no es fácil aplicar la regla de Laplace. También en este caso el error era considerar como igualmente posibles casos que no lo eran y despreciar el proceso previo de asignación aleatoria de números.

4.5. *El problema Monty Hall*

Este problema debe su nombre al de un famoso presentador de un programa-concurso de TV americano que funcionó de 1963 a 1990 y que se pasó en otros países, entre ellos el nuestro. El concursante que llegaba a la fase final tenía que escoger una entre tres puertas. Detrás de una de ellas había un coche. Detrás de las otras dos había una cabra. Una vez hecha la elección, el presentador no abría la puerta seleccionada, sino una de las otras dos puertas y tras ella aparecía una cabra. Ofrecía entonces al concursante la oportunidad de cambiar su primera elección por la puerta que permanecía cerrada.

¿Qué es más ventajoso: mantenerse en la primera elección o cambiar? Esta cuestión recibe hoy el nombre de: *Problema Monty Hall*. Fue planteada en septiembre de 1990 por un lector habitual de la sección *Pregunta a Marylin* que la popular columnista americana Marylin Vos Savant tenía (y tiene todavía hoy) en la revista *Parade*, una revista semanal que se distribuye como suplemento dominical de muchos periódicos de Estados Unidos. Hacia 1990 la revista *Parade* se distribuía a 350 periódicos con una tirada total de 36 millones de ejemplares.

El razonamiento más extendido sobre este problema aplicaba la regla de Laplace: quedan dos puertas y detrás de una de ellas hay un coche; por tanto, la probabilidad de cualquiera de ellas es ½. No hay ventaja ninguna en cambiar la primera elección. Sin embargo, Marylin contestó que era más ventajoso cambiar, originando un virulento debate en el que muchos lectores, incluidos matemáticos y profesores, consideraban disparatada esta respuesta. Aunque, finalmente, su opinión se acabó imponiendo, recibió unas diez mil cartas de protesta. Paul Erdös, figura indiscutible en la historia de la matemática moderna, uno de los más grandes matemáticos del siglo XX, si no el mayor, confiesa en su autobiografía que defendió la tesis equivocada y que sólo se acabó convenciendo a través de los resultados de simulaciones de ordenador.

He aquí la demostración de Marylin.

Primero: supongamos que en primera opción elegimos la puerta 2 y que no vamos a cambiarla.

Hay tres casos posibles, porque el coche puede estar detrás de cualquiera de las tres puertas:

Puerta 1	**Puerta 2**	**Puerta 3**	**Premio si se elige la puerta 2 (no se cambia)**
coche	cabra	cabra	cabra
cabra	coche	cabra	coche
cabra	cabra	coche	cabra

Conclusión: en el caso de no cambiar la primera opción, la probabilidad de conseguir el coche es 1/3.

Segundo: supongamos que vamos a cambiar nuestra primera opción:

Puerta 1	**Puerta 2**	**Puerta 3**	**Premio si se elige la puerta 2 (se cambia)**
coche	cabra	cabra	coche
cabra	coche	cabra	cabra
cabra	cabra	coche	coche

Conclusión: en el caso de cambiar la primera opción, la probabilidad de conseguir el coche es 2/3.

El resultado va a ser el mismo si, en vez de la puerta 2, se elige cualquier otra puerta. Siempre es más ventajoso cambiar la primera opción. Calcular las probabilidades deductivamente, antes de hacer el experimento, nos sitúa en una posición de ventaja con respecto al azar, pero sólo si las calculamos correctamente, lo que no siempre es fácil.

4.6. *Procedimiento inductivo para medir la probabilidad*

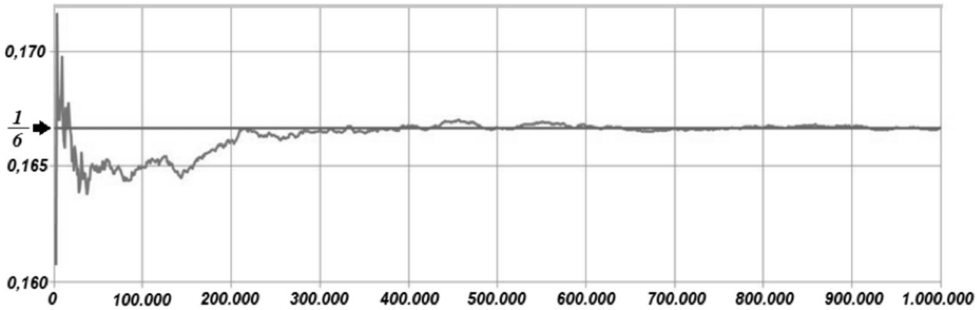
Consiste en hacer el experimento aleatorio muchas veces, y la fracción de veces que ocurre un suceso sobre el total de repeticiones la tomamos como medida de la dificultad o facilidad de ese suceso, es decir, como una medida experimental de la probabilidad.

Por ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de que una moneda caiga de canto? Parece muy difícil que una moneda caiga de canto, pero es que se trata de una moneda un tanto especial. Es una "moneda" muy gruesa con un grosor de, digamos, la mitad de su diámetro que, evidentemente, sí que puede caer de canto.

Se lanza la moneda, por ejemplo, 2.000 veces y resulta que 540 veces la moneda cae de canto. Su frecuencia relativa es de 54/200 = 0,27=27%. Pero, ¿cómo servirá esto para medir la probabilidad? Si lanzamos la moneda otras 2.000 veces ¿va a suceder otra vez que en 540 ocasiones caiga de canto? Pues seguramente no, pero no andaremos lejos. Experimentalmente se comprueba que cuantas más tiradas realicemos los porcentajes obtenidos son más y más parecidos y se aproximan a un número que podemos tomar como la probabilidad del suceso estudiado.

A esta afirmación se le llama hoy: **Ley de los grandes números**. Vamos a comprobarla con una simulación de tiradas de dado, contando el número de veces que sale el 5 en un millón de tiradas. Si la ley de los grandes números es correcta, el 5 saldrá la sexta parte de las veces aproximadamente y las desviaciones de esta afirmación serán tanto más pequeñas cuanto mayor número de tiradas hagamos.

Para obtener la gráfica que sigue, un ordenador ha tirado un millón de veces el dado, ha ido contando el número de 5 y calculando y representando, cada 1.000 tiradas, la proporción de 5 (frecuencia relativa) que se iba obteniendo, a medida que avanzaba el proceso.



Frecuencia relativa del 5 en función del número de tiradas

En las primeras 10.000 tiradas, la máxima desviación de la proporción de 5, respecto a la probabilidad (1/6=0,1666) fue de 0,0206. De 10.000 a 100.000 fue de 0,0028. De 300.000 a 600.000 fue de 0,0004 y de 600.000 a 1.000.000 de tiradas la máxima desviación fue de 0,0001. O sea, las desviaciones van disminuyendo en la proporción 206, 28, 4 y 1.

Así funciona la Ley de los grandes números. Fue conjeturada por Cardano en el siglo XVI, pero no se demostró matemáticamente hasta el siglo XVII por Jakob Bernouilli. El nombre se lo dio Poisson en el siglo XIX y su enunciado y demostración se han ido refinando y perfeccionando hasta pleno siglo XX con las aportaciones de Kolmogorov.

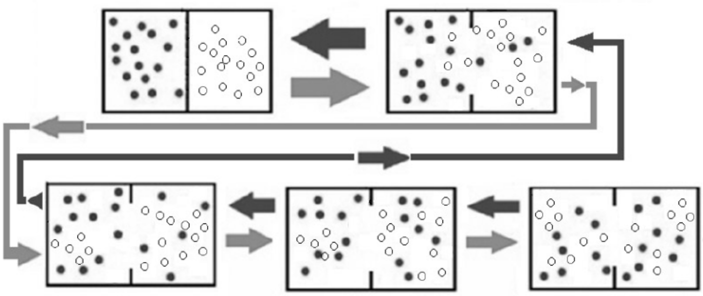
4.7. *Regularidad*

Llegados a este punto, parémonos a reflexionar sobre un detalle. Estamos hablando de leyes. ¿Puede haber leyes en el azar? ¿No es el azar, precisamente, la característica de aquellos fenómenos que escapan a toda ley? No nos parecería extraño oír, que lo único que se puede esperar del azar es caos y desorden.

Que el azar esté sometido a reglas, a leyes, nos parece conceptualmente contradictorio. Pero esta contradicción se suaviza un tanto cuando pensamos que las leyes del azar son leyes estadísticas que no mandan sobre un resultado concreto. Lo que va a salir en esta tirada de dado es impredecible. Pero cuando se tira el dado un gran número de veces, cada cara sale la sexta parte de las veces, tanto más aproximadamente cuanto mayor es el número de tiradas. Del azar impredecible de cada tirada surge lo predecible: la proporción de cada cara cuando se tira el dado muchas veces. Cuando juegan su papel los grandes números, el azar desaparece en cierto sentido. Y aparece la regularidad, la ley. El azar, aliado con los grandes números, hace aparecer la ley. En esto consiste la fuerza del azar.

4.8. *La segunda ley*

La llamada segunda ley de la termodinámica es la que establece el conocido principio experimental de que: "En una transferencia espontánea, el calor pasa siempre de los cuerpos calientes a los fríos y nunca en dirección opuesta". También establece análogamente que: "Si se ponen en contacto dos gases distintos, sus partículas se mezclan hasta formar una disolución homogénea, pero el proceso inverso no ocurrirá".



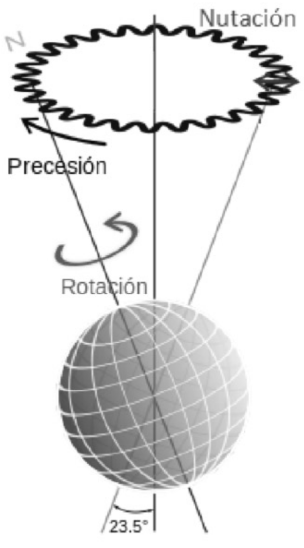
En la figura se representa el proceso de mezcla que tiene lugar cuando se elimina la pared que separa dos gases. El proceso siempre tiene lugar en el sentido que marcan las flechas grises, nunca en el sentido de las flechas negras. Nunca se ha visto que una mezcla se deshaga espontáneamente y aparezcan separados sus componentes. Las leyes de la mecánica de partículas, sin embargo, no lo prohíben. Si en un sistema mecánico es posible que cada partícula tenga una cierta velocidad, también es posible que todas ellas tengan la velocidad opuesta y en ese caso el proceso de mezcla daría marcha atrás y los componentes aparecerían separados otra vez.

¿Os imagináis que en la mezcla de gases que es el aire de esta sala, principalmente nitrógeno y oxígeno, por un azar, el oxígeno se fuera hacia el fondo de la sala y el nitrógeno se quedara delante? Esto sería una amenaza para la vida de los que estamos en la mesa y en las primeras filas. Pero podemos tranquilizarnos. La separación espontánea de una mezcla de gases no ha ocurrido nunca, y no ocurrirá. Pero no porque sea imposible, sino porque su probabilidad es muy pequeña. La interpretación que se sigue de esto es muy simple: los sistemas en equilibrio son sólo situaciones de máxima probabilidad. La segunda ley recoge el hecho de que la evolución de los sistemas físicos es el paso de una situación hacia otra más probable y afirma que la evolución inversa no ocurre nunca. La segunda ley es una consecuencia de la ley de los grandes números, es decir de la fuerza del azar.

4.9. *Azar y determinismo*

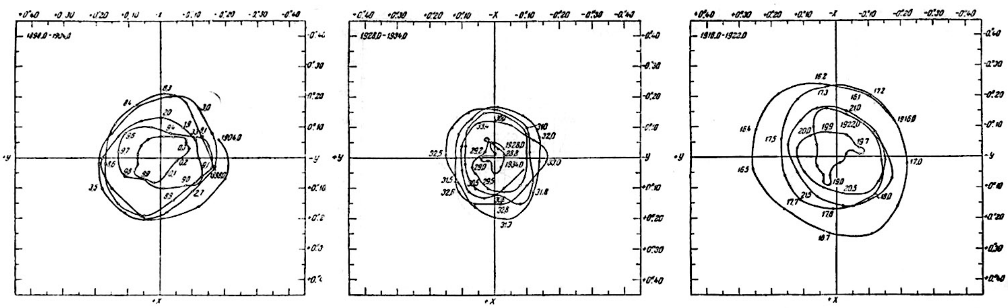
Aunque azar y determinismo parecen cosas contrarias, hemos visto que de fenómenos puramente aleatorios, como es el movimiento caótico de las partículas de un gas, surge una ley como la segunda de la termodinámica. ¿Y al revés? De situaciones perfectamente determinadas ¿puede surgir el azar? Pues sí, y se puede ver en la rotación terrestre.

El movimiento de los astros se suele utilizar como prototipo de regularidad y determinismo, lo más opuesto al azar. Y los movimientos del sistema solar se han comparado muchas veces a los de un reloj perfecto de alta precisión. ¿Alguien diría que esa precisión descansa sobre el azar?



Aparte del movimiento de rotación sobre su eje, las leyes de la mecánica imponen a la Tierra, además, un movimiento también regular llamado *precesión*, por el que cabecea describiendo, cada 25.000 años, un cono de 23º de amplitud en torno a un eje perpendicular al plano de la órbita terrestre. A éste se superpone otro movimiento de cabeceo llamado **nutación** que tiene una amplitud de 17 segundos de ángulo (500 m sobre la superficie terrestre) y un período de 19 años.

Bien, pues cuando se estudia con toda precisión posible, encontramos además otro movimiento de giro, superpuesto, que sólo tiene una amplitud de algunas décimas de segundo de ángulo (menos de 5 metros sobre la superficie terrestre). Con esta amplitud, cada 14 meses aproximadamente, el eje da una vuelta irregular en una trayectoria caótica e impredecible.



Así podríamos decir que no hay forma de librarse del azar, ni siquiera en el terreno de la ley. Cuando se observan a pequeña escala fenómenos deterministas, el azar muestra su imperio. El azar y el determinismo se manifiestan juntos en nuestro trato con la naturaleza. De lo aleatorio surge lo determinado (la ley de los grandes números) y en lo determinado, a pequeña escala, aparece el azar.

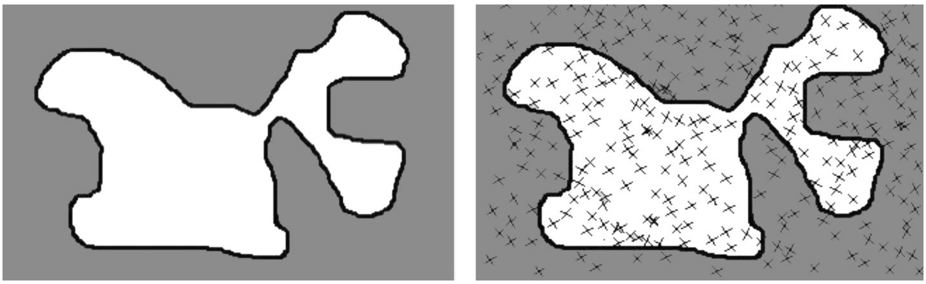
5. Rentabilizar el azar

Queda todavía hablar del último recurso que enunciábamos para controlar el azar: utilizar el azar en nuestro provecho. Sacar utilidad de la incertidumbre.

5.1. *El Método de Montecarlo*

El azar puede ser una herramienta adecuada de trabajo. El método de Montecarlo (o simulaciones de Montecarlo) es un ejemplo de ello. Para explicarlo con brevedad veamos un sencillo problema geométrico.

Supongamos que quiero hallar la superficie de un recinto irregular. Vamos a proceder de la siguiente manera: primero, lo encerramos en un recinto rectangular cuya área conocemos y lo colgamos en una pared



En segundo lugar, jugamos a los dardos y los lanzamos al azar sin pretender puntería ninguna, contabilizando los que caen dentro del recinto irregular y dentro del recinto rectangular. Finalmente aplicamos la siguiente proporción:

$$\frac{\text{Área del recinto regular}}{\text{Área del rectágulo}} = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de dardos en el recinto irregular}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de dardos en el rectángulo}}$$

Fórmula en la que sólo hay una incógnita fácil de calcular. Hay que decir que en los cálculos reales no se utilizan dardos, sino números aleatorios generados por un ordenador que dan las coordenadas de un punto en el recinto.

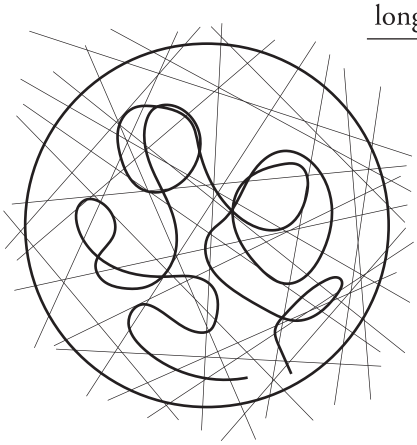
El método de Montecarlo se utilizó por primera vez en el marco del proyecto Manhattan, en el diseño del primer reactor nuclear, durante la segunda guerra mundial. Para mantener de forma controlada la reacción en cadena de desintegración del uranio, se quería saber qué tamaño y forma tendría que tener el material de uranio para que los neutrones, en sus colisiones al azar, chocaran varias veces con átomos de uranio antes de perderse fuera del material. Si escapaban muchos, la reacción en cadena se pararía, si escapaban pocos, el reactor podría explotar. Y el azar de Montecarlo resolvió el problema, encontrando la forma idónea.

Este método también se utiliza en multitud de procesos que dependen del azar, desde la viabilidad económica de proyectos empresariales, hasta la evolución de una mancha contaminante en el mar. En todos los casos se trata de programas que simulan procesos reales en el ordenador, permitiendo observar los resultados cuando se introduce el azar.

5.2. *Medir la longitud de un hilo*

Es una variante del método de Montecarlo. Se trata de hallar la longitud de un hilo retorcido por el interior de un círculo. Sorprendentemente el siguiente método funciona con bastante precisión. Trazamos rectas al azar encima de la imagen del hilo y el círculo. Esto se puede hacer volteando una regla y dejándola caer sobre la imagen situada en el suelo.

Para cada recta obtenida hay que anotar el número de puntos x, en los que corta al hilo y luego, cuando se tiene un buen número de datos, calcular el valor medio $\underline{x}$ de todos esos números.



$$\frac{\text{longitud de la Circunferencia}}{2} = \frac{\text{longitud del hilo}}{\text{nº medio de cortes}}$$

$$\frac{2\pi R}{2} = \frac{L}{\underline{x}}$$

$$L = \pi R \underline{x}$$

Cada recta corta a la circunferencia en 2 puntos, y al hilo en x puntos. Pues decimos: la longitud de la circunferencia es a 2 como la longitud del hilo es al número medio de puntos de corte $\underline{x}$. Esto significa que estamos suponiendo que la longitud del hilo es proporcional al número medio de puntos de corte $\underline{x}$. Y, haciendo cuentas, se obtiene la longitud del hilo.

Hice esta experiencia tal como os he contado utilizando unas 100 rectas y obtuve una longitud para el hilo de 1,48 m, cuando la longitud real del hilo, que yo mismo había preparado, era de 1,50 m. Es un error del 1,3 %, que sin duda disminuiría utilizando un número mayor de rectas

5.3. *¿Cómo se puede averiguar el número de peces que hay en un lago?*

Éste es el método: se pesca un número de peces, por ejemplo 1.000. Se les marca, (por ejemplo, pintando de forma indeleble algunas escamas) y se les devuelve vivos al lago, dispersándolos. Se espera un tiempo para que se mezclen bien con los que no están marcados. Se hace una redada al azar y supongamos que se capturan 650 peces de los cuales hay 32 marcados. Como están bien mezclados, suponemos que, si quisiéramos recoger todos los peces marcados (1.000) tendríamos que pescar todos los peces del lago (X). Entonces establecemos la proporción: X/1.000 = 650/32; de donde resulta X = 20.312 peces. Bueno, esto es una estimación aproximada. En realidad no basta con una sola redada, hay que hacer varias y coger el valor medio del número de peces marcados que se encuentren. La estimación es adecuada con cierto margen de error. Aplicando las matemáticas de la probabilidad se puede llegar, por ejemplo, a conclusiones del siguiente estilo: la probabilidad de que haya un número de peces comprendido entre 20.000 y 21.000 es del 90%.

5.4. *Los algoritmos de hormigas*

El investigador italiano Marco Dorigo, que trabaja en la Universidad Libre de Bruselas, basándose en el comportamiento de las hormigas, diseñó un método para resolver eficazmente problemas que de otro modo serían imposibles.

Es conocido el comportamiento de una colonia de hormigas. Cuando salen a buscar comida se mueven al azar. Cuando una de ellas encuentra comida, vuelve a la colonia dejando un rastro de unas substancias llamadas feromonas que ejercen un poder atractivo para las otras hormigas. Por otra parte, ese rastro dejado por una hormiga se volatiliza y desaparece con el tiempo. Esto tiene un curioso efecto. Supongamos que tras encontrar comida, dos hormigas intentan encontrar el camino de vuelta al hormiguero. Una de ellas, por azar, ha escogido una ruta larga y otra la más corta. Si otras hormigas se acercan a los rastros de feromonas dejados, el de la ruta larga tiene más posibilidades de que se evapore antes de que otra hormiga lo complete. Y así se tiende a producir una concentración mayor de hormigas en los rastros cortos. El resultado es que las hormigas acaban encontrando el camino más corto entre el hormiguero y la comida, poniéndose todas a la tarea.

Marco Dorigo se inspira en este comportamiento natural para dar una solución original al llamado problema del viajante que es el siguiente: un viajante, debe recorrer un número de ciudades de la forma más económica, empezando y finalizando el recorrido en una cualquiera de ellas y pasando sólo una vez por cada una. ¿Cuál ha de ser su itinerario? La exploración con ordenador de todos los caminos posibles y su evaluación se transforma en un problema insoluble, a poco que crezca el número de ciudades. Si se trata de 5 ciudades a visitar hay 120 itinerarios posibles, lo que no plantea mayor problema para averiguar el más económico. Para 10 ciudades hay ya más de 3 millones de trayectorias posibles. Para 100 ciudades el número de caminos posibles tiene 158 cifras. Evaluar estos caminos es tarea imposible incluso para los ordenadores más potentes. Lo que se hace entonces es utilizar algoritmos que obtienen una solución que, sin tener garantía de que se trata de la solución óptima, sí se aproxima a la óptima.

Lo que hace Dorigo es proponer un algoritmo de simulación de colonia de hormigas que ofrece unos resultados buenos en tiempo razonable. Propone: lanzar un “enjambre de hormigas virtuales” en esa red de caminos posibles. Una hormiga virtual viene definida por su estado, esto es, el nodo de la red en el que está. El programa va repasando todas las hormigas virtuales y calcula la probabilidad de que la hormiga pase de la posición actual a cada uno de los nodos por donde todavía no ha pasado. En ese cálculo interviene la feromona virtual que hay en ese camino. Esta feromona virtual es simplemente un número asociado a cada posible trayecto entre dos nodos que aumenta con el número de hormigas que pasan por él y disminuye con el tiempo, simulando así la feromona que se va evaporando.

El resultado es que cada hormiga virtual, por medio del azar, va explorando caminos y deja un rastro de feromona virtual que hace aumentar la probabilidad de que otras hormigas virtuales lo sigan. Así, las hormigas se van acumulando en los caminos más cortos y en sucesivas etapas, el enjambre, comportándose al azar, acaba seleccionando una ruta óptima. Este método ha originado que se hable de inteligencia de enjambre y se aplica no sólo al problema del viajante, sino a un buen número de situaciones en optimización y robótica.

Estos son unos pocos ejemplos de cómo se puede domesticar el azar y hacerlo trabajar para nosotros, técnica en la que sin duda se avanzará más todavía en el futuro. Todo lo que ocurre es producto del azar o de la necesidad, sostenía Demócrito. Pero lo necesario y lo imprevisible, el destino y el azar intercambian resultados y se originan uno a otro. No es nada nuevo que la existencia humana esté agitada por estas dos grandes olas que se confunden y que con distintos rostros nos muestran la pequeñez de nuestra existencia y la magnitud de lo desconocido que nos envuelve.

Bibliografía

Un libro de divulgación interesante sobre el azar es: *El andar del borracho*, de Leonard Mlodinow, Ed. Crítica. Barcelona, 2008.

Referencias interesantes de otros libros de divulgación sobre el azar, pueden ser encontradas en www.divulgamat.net

Los datos y figuras sobre movimientos precisos del eje terrestre provienen del libro de Kulikov, *El desplazamiento de los polos de la Tierra*, Ed, Lautaro, Buenos Aires, 1958.

Para Información detallada sobre la polémica de la votación de la CUP consultar: http://www.elperiodico.com/es/noticias/politica/empate-asamblea-cup-probabilidades-matematicas-estadisticas-empate-4780626

Un estudio matemático correcto y completo sobre el problema del sorteo de excedentes de cupo del servicio militar en 1997, se puede ver en: https://revistasuma.es/IMG/pdf/27/081-090.pdf

El debate registrado en el diario de sesiones del congreso sobre el sorteo de la mili se encontrará en: http://www.congreso.es/public_oficiales/L6/CONG/DS/PL/PL_123.PDF

Para más aclaraciones o preguntas dirigirse a: jarepan@gmail.com

Nota biográfica

El autor es Licenciado en Ciencias Físicas por la Universidad de Valladolid. Ha ejercido principalmente como profesor de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria en Institutos de las provincias de León, Burgos, Barcelona y, principalmente, Asturias.

Como profesor asociado del Departamento de Energía de la Universidad de Oviedo, presentó un trabajo de investigación sobre ventilación de túneles, en el II Congreso Ibero-Americano de Ingeniería Mecánica. Bello Horizonte (Brasil) 1995.

Ha publicado trabajos orientados a la enseñanza de las matemáticas y la física en diversas revistas, (*Revista Llull de Historia de la Ciencia, Revista Española de Física, Gaceta Matemática, Physics Education*).

Jubilado desde el año 2008, colaboró con la Umer en 2010 y 2013 impartiendo respectivamente las conferencias: *Las Formas Fractales y Los instrumentos para pesar. Un paseo por la historia de las básculas*.