Matemáticas: Enseñanza Universitaria
ISSN: 0120-6788
reviserm@univalle.edu.co
Escuela Regional de Matemáticas
Colombia

Hoyos H., Diego L.

La matemática de la música

Matemáticas: Enseñanza Universitaria, vol. XX, núm. 1, 2012, pp. 29-48
Escuela Regional de Matemáticas
Cali, Colombia

Vol. XX, N$^{\underline{o}}$ 1, Junio (2012)
Matemáticas: 29–48

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

La matemática de la música

Diego L. Hoyos H.
Universidad del Valle

Recibido Ene. 2012 Aceptado May. 2012

Abstract
This paper gives a mathematical construction of the Pythagorean scale, just intonation and equal temperament, using the concepts of equivalence relation and equivalence class, in order to define musical intervals as well as its unit of measurement, the octave.

Keywords: Interval, octave, scale

MSC(2000): 76M10, 76D03

Resumen
En este artículo se da una construcción matemática de las escalas Pitagórica, justa entonación y equitemperada, utilizando el concepto de relación de equivalencia y clase de equivalencia para definir los intervalos musicales así como su unidad de medida, la octava.

Palabras y frases claves: Intervalo, octava, escala

1 Introducción

Existe mucha literatura acerca de la relación existente entre matemáticas y música. Desde Pitágoras hasta nuestros días se ha investigado sobre el papel que desempeña la matemática en el entendimiento de los sonidos musicales y más aún, en su utilización en la composición e interpretación de las obras musicales. Este artículo no presentará intrincados conceptos matemáticos que desemboquen en una teoría matemática de la música [4], ni tampoco presentará teoría musical [5] conocida solamente por profesionales de la música. Más bien intentará explicar de forma clara y comprensible, tanto al músico no matemático como al matemático no músico la interrelación entre estas dos ramas del conocimiento científico y artístico.

Sabemos que los sonidos en general, pueden considerarse como ondas que se propagan en algún medio, principalmente el aire. Así tenemos el llamdo "ruido", con un espectro de frecuencias continuo y otro tipo de sonido más estructurado, con una frecuencia fundamental bien definida y compuesto por un conjunto de frecuencias multiplos enteros de la fundamental, llamadas *armónicos* y espectro de frecuencias discreto. En este artículo sólo consideraremos este segundo tipo de sonidos, generados principalmente por los instrumentos musicales y que llamaremos *notas musicales* o simplemente *notas*. El tono o altura de las notas musicales se corresponde con la frecuencia y es el grado de agudeza del sonido. Entre más alta sea la frecuencia, más agudo es el sonido y es el elemento perceptivo fundamental en la construcción de las escalas musicales. Comenzaremos con la definición matemática de intervalo musical, y su unidad de medida, la octava, para luego construir algunas de las escalas más conocidas, ladrillos fundamentales para la creación de una obra musical.

2 Intervalos musicales

En música, un intervalo musical se define como la diferencia de entonación o de altura entre dos notas musicales. Para matematizar este concepto, consideramos a $\mathbb{R}^+$ como el conjunto de todas las frecuencias de las notas musicales y en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definimos la siguiente relación:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Longleftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1.$$

La relación anterior es una relación de equivalencia y por lo tanto se tiene la proyección natural al conjunto cociente

$$p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\right) / \sim$$

definida por

$$p\,(x, y) = \overline{(x, y)},$$

donde $\overline{(x, y)}$ denota la clase de equivalencia de la pareja (x, y). Si definimos la función

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

por

$$\phi(x, y) = \frac{y}{x},$$

es fácil demostrar que

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Longleftrightarrow \phi(x_1, x_2) = \phi(y_1, y_2),$$

por lo que la aplicación

$$\overline{\phi} : \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\right) / \sim \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

definida por

$$\overline{\phi}\left(\overline{(x, y)}\right) = \frac{y}{x},$$

es una biyección [6]. El siguiente diagrama conmutativo ilustra esta situación:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "p"] & \frac{y}{x} \\ \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+/\sim \quad \overline{(x,y)} \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\overline{\phi}\circ p = \phi$$

El conjunto cociente, $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)/\sim$ es el conjunto de intervalos musicales y un intervalo musical se puede ver como la clase de equivalencia de un par de frecuencias $\overline{(x,y)}$ o, en forma equivalente, identificando $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)/\sim$ con $\mathbb{R}^+$, vía la biyección $\overline{\phi}$, como el cociente de sus frecuencias $\frac{y}{x}$.

3 Medida de intervalos: la octava

Cuando dos sonidos tienen uno la frecuencia doble del otro, decimos que están separados por una octava, esto es, la octava es la diferencia de altura de dos sonidos de frecuencias x y $2x$. De manera que la octava es el intervalo $\overline{(1,2)}$, según la definición dada en la sección anterior, o en términos del cociente de frecuencias, como la fracción $\dfrac{2}{1}$.

Este intervalo es especial porque desde siempre se ha considerado que dos notas separadas por una octava son en realidad la misma nota. Esto se entiende en el sentido de que si una obra musical está formada por notas $N_1, N_2, ..., N_m$ de frecuencias $x_1, x_2, ..., x_m$, entonces la obra musical no cambia si se toca con notas de frecuencias $2x_1, 2x_2, ..., 2x_m$. Por ejemplo, la diferencia de altura entre dos notas de frecuencias $x_1 = 100$ y $x_2 = 200$ Hz es la misma que la diferencia de altura entre dos notas de frecuencias $x_2 = 200$ y $x_3 = 400$ Hz y la misma que la diferencia de altura entre dos notas de frecuencias $x_3 = 400$ y $x_4 = 800$ Hz, etc. Si queremos representar estas notas, que están separadas por una octava, como puntos en una línea recta, tendrían la apariencia mostrada en la Figura 1.

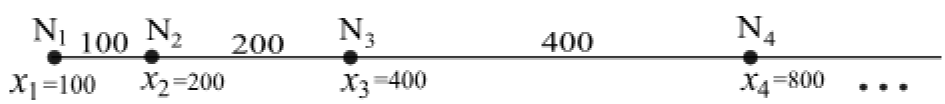

Figura 1: representación en la recta de notas separadas una octava por medio de sus frecuencias

Es claro que no es válido medir el intervalo de octava como la diferencia de las frecuencias, pues $200 - 100 = 100$ diferente a $400 - 200 = 200$, diferente a $800 - 400 = 400$, etc. Si queremos que la separación de las distintas octavas sea la misma, como en la Figura 2, debemos utilizar una escala logarítmica, es decir, en lugar de escribir las frecuencias en cada punto, escribimos los logaritmos de las frecuencias, esto debido a la conocida propiedad de los logaritmos

$$\log_b y - \log_b x = \log_b \frac{y}{x}.$$

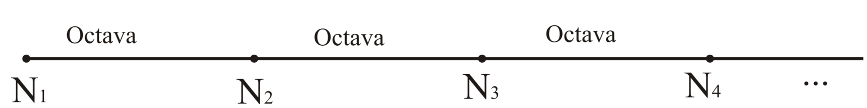

Figura 2: igualdad de octavas

La octava tendría una medida de

$$\log_b 2x - \log_b x = \log_b 2$$

y la representación en la recta cambia como se observa en la Figura 3.

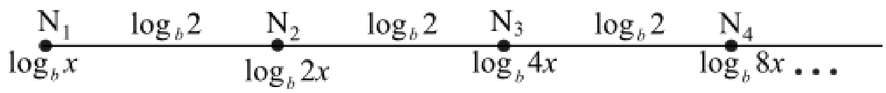

Figura 3: medida logarítmica de la octava

Si tomamos $b = 2$, tenemos que $\log_2 2 = 1$, lo que significa que la octava tendría el papel de intervalo unitario en el conjunto de intervalos y podría tomarse como el patrón de medida

$$m(\text{octava}) = 1$$

y se representa en la recta como en la Figura 4.

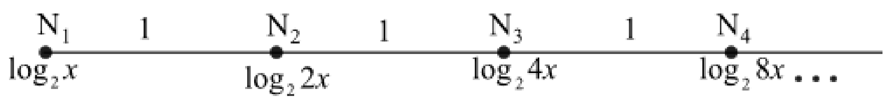

Figura 4: la octava como unidad

Para definir la medida de un intervalo musical en general, aplicamos $\log_2$ a ambos lados de la igualdad $x_1 y_2 = x_2 y_1$ (que es la ecuación que define la relación de equivalencia dada en el sección anterior), para obtener

$$\log_2 y_1 - \log_2 x_1 = \log_2 y_2 - \log_2 x_2.$$

Esta igualdad nos sugiere definir la medida (en octavas) de un intervalo $\overline{(x, y)}$ por

$$m\left(\overline{(x, y)}\right) = |\log_2 y - \log_2 x| = \left|\log_2 \frac{y}{x}\right|.$$

De esta manera obtenemos una forma natural de definir el cambio de altura entre dos notas musicales de frecuencias x y y.

Observe que esta definición de medida de intervalo musical se utiliza para la representación de las notas en el pentagrama. En la Figura 5 vemos notas musicales formando intervalos de octava, con los valores de las frecuencias al frente de ellas. Observe que la distancia (vertical) es la misma e igual a 1 (una octava).

Figura 5: el pentagrama es una escala logarítmica

Por ejemplo, $\log_2 528 - \log_2 264 = \log_2 264 - \log_2 132 = 1$.

4 La octava como intervalo de $\mathbb{R}$

En la sección anterior establecimos que una obra musical no cambia si se doblan todos las frecuencias de sus notas, esto es, si cambiamos x_i por $2x_i$. Esto es igualmente cierto si utilizamos notas con frecuencias que son potencias de dos de las frecuencias originales, esto es, notas de frecuencias $2^n x_1, 2^n x_2, ..., 2^n x_m$, para $n \in \mathbb{Z}$.

Podemos dar otra interpretación matemática de la octava por medio de la siguiente relación: diremos que dos notas N_1 y N_2 con frecuencias x_1 y x_2 respectivamente, son equivalentes, si x_2 es el producto de una potencia entera de 2 por x_1, esto es

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_2 = 2^n x_1 \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es muy sencillo probar que dicha relación es efectivamente una relación de equivalencia. El conjunto formado por todas las clases de equivalencia, que denotamos $\mathbb{R}^+/\sim$ se denomina **octava**. Si $\overline{x} \in \mathbb{R}^+/\sim$, entonces

$$\overline{x} = \{z \,|\, z = 2^n x,\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Para ver la naturaleza de este conjunto, observamos que si $x \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq 2^n x < 2a$ para cualquier $a \in \mathbb{R}^+$. Para hallar este n, aplicamos $\log_2$ a cada lado en la desigualdad

$$a \cdot 2^{-n} \leq x < a \cdot 2^{-n+1}$$

para obtener

$$-n \leq \log_2 \frac{x}{a} < -n + 1.$$

De manera que si denotamos $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera de un número x, entonces la desigualdad anterior nos dice que

$$-n = \left\lfloor \log_2 \frac{x}{a} \right\rfloor.$$

Así la aplicación

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [a, 2a)$$

definida por

$$f(x) = \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{a} \rfloor}}$$

es sobreyectiva. La Figura 6 muestra su gráfica para $a = 1$.

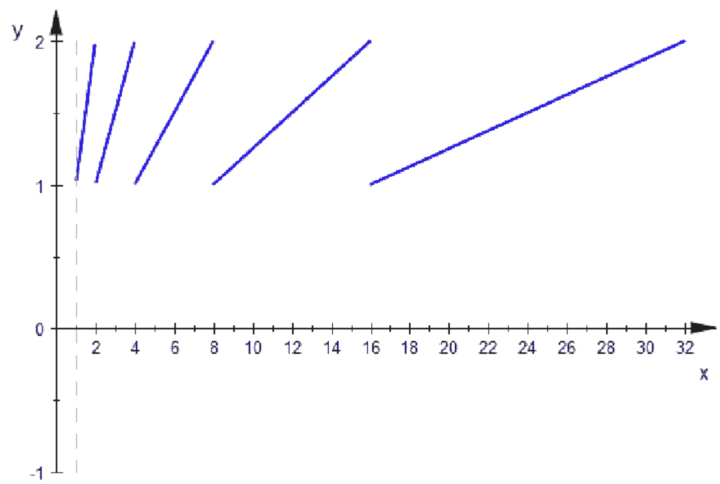

Figura 6: función $f(x) = \dfrac{x}{2^{\lfloor \log_2 x \rfloor}}$

Usando las propiedades del logarítmo y de la función parte entera, no es difícil demostrar que

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y);$$

de manera que la aplicación

$$\overline{f} : \mathbb{R}^+/\sim \longrightarrow [a, 2a)$$

definida por

$$\overline{f}(\overline{x}) = f(x) = \frac{x}{2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{a} \rfloor}}$$

es una biyección. En el siguiente diagrama conmutativo se muestra la situación.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^+ \arrow[r, "f"] & {[a,2a)} \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "p"'] & \dfrac{x}{2^{\lfloor \log_2 \frac{x}{a} \rfloor}} \\
\mathbb{R}^+/\sim \;\; \overline{x} \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \overline{f} \circ p = f
\end{tikzcd}$$

Con la biyección $\overline{f}$ se establece la identificación conjuntista

$$\text{Octava} = \mathbb{R}^+ / \sim \approx\ [a, 2a)$$

para cualquier $a \in \mathbb{R}^+$. Así, cualquiera de estos intervalos $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $[1, 2)$, $[7, 14)$, $[440, 880)$, etc, representa una octava. Es común tomar $a = 1$ y considerar la octava como el intervalo $[1, 2)$:

$$\text{Octava} =\ [1, 2).$$

5 Intervalos musicales en la octava [1,2)

Nuestro propósito final es construir escalas musicales en la octava. Los intervalos en general los pensaremos como cocientes de frecuencias, esto es, elementos de $\mathbb{R}^+$, o cuando sea conveniente, como clases de equivalencia de pares de frecuencias, esto es, elementos de $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) / \sim$.

Diremos que dos intervalos $r_1 \in \mathbb{R}^+$y $r_2 \in \mathbb{R}^+$ son *equivalentes módulo octava*, si existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$r_2 = 2^n r_1.$$

Si un intervalo es mayor o igual que 2 o menor que 1, podemos encontrar intervalos equivalentes dentro de la octava $[1, 2)$ por un proceso de reducción o ampliación, multiplicando por una potencia de 2.

5.1 Reducción de intervalos

Si $r \geq 2$, encontramos su equivalente en la octava $[1, 2)$ multiplicándolo por $\frac{1}{2^{\lfloor \log_2 r \rfloor}}$. Por ejemplo, el intervalo $\frac{25}{2} > 2$. Tomando $n = \left\lfloor \log_2 \frac{25}{2} \right\rfloor = 3$, tenemos que

$$1 < \frac{1}{2^3} \frac{25}{2} = \frac{25}{16} < 2$$

Otro ejemplo, si $r = \sqrt{550}$, $\log_2 \sqrt{550} \approx 4{,}55164$. $\lfloor \log_2 \sqrt{550} \rfloor = 4$, entonces

$$1 < \frac{1}{2^4} \sqrt{550} \approx 1{,}4657 < 2$$

5.2 Ampliación de intervalos

Si $r < 1$, encontramos su equivalente en la octava $[1, 2)$ multiplicándolo por $2^{\lfloor \log_2 r \rfloor}$. Por ejemplo, el intervalo $\frac{3}{43} < 1$. Tomando $n = \left\lfloor \log_2 \frac{3}{43} \right\rfloor = 4$, tenemos que

$$1 < 2^4 \frac{3}{43} = \frac{48}{43} < 2$$

Unísono (intervalo trivial)	$\frac{1}{1}$
Octava	$\frac{2}{1}$
Quinta	$\frac{3}{2}$
Cuarta	$\frac{4}{3}$
Tercera mayor	$\frac{5}{4}$
Tercera menor	$\frac{6}{5}$
Sexta mayor	$\frac{5}{3}$
Sexta menor	$\frac{8}{5}$
Segunda mayor	$\frac{9}{8}$
Segunda menor	$\frac{10}{9}$
Cuarta aumentada	$\frac{45}{32}$
Quinta disminuida	$\frac{64}{45}$
Séptima menor	$\frac{9}{5}$
Séptima mayor	$\frac{15}{8}$
Séptima menor grave	$\frac{16}{9}$
Séptima menor armónica	$\frac{7}{4}$

Cuadro 1: intervalos justos

Los intervalos más utilizados en música, que llamaremos *intervalos justos*, definidos como cocientes de frecuencias en la octava $[1, 2)$, se muestran en el cuadro 1. Estos intervalos están formados de acuerdo a la serie de los armónicos de un sonido de frecuencia fundamental x. Así por ejemplo, la quinta es el tercer armónico, la tercera mayor es el quinto armónico, la segunda mayor es el noveno armónico, etc. El intervalo $\dfrac{3}{4} < 1$ es un intervalo de quinta, porque su equivalente en la octava $[1, 2)$ es $2 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. El orden en que están escritos en el cuadro 1, se corresponde con el orden de consonancia, tema que será explicado en la sección 7 y subsiguientes.

6 Operaciones entre intervalos

En esta sección veremos como sumar restar e invertir intervalos.

6.1 Suma de intervalos

Dados dos intervalos $\overline{(x, y)}$ y $\overline{(z, w)}$, en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ / \sim$, definimos su suma por

$$\overline{(x, y)} \oplus \overline{(z, w)} = \overline{(xz, yw)}.$$

Debido a la identificación

$$\overline{(x, y)} \longleftrightarrow \frac{y}{x}$$

se obtiene la correspondencia

$$\overline{(x,y)} \oplus \overline{(z,w)} \longleftrightarrow \frac{y}{x} \cdot \frac{w}{z},$$

esto es, la suma de dos intervalos se efectúa *multiplicando* las fracciones que los definen. Dado que el producto de números reales es conmutativo y asociativo, esta suma definida sobre las clases de equivalencia también goza de estas propiedades:

- $\overline{(x,y)} \oplus \overline{(z,w)} = \overline{(z,w)} \oplus \overline{(x,y)}$
- $\left(\overline{(x,y)} \oplus \overline{(z,w)}\right) \oplus \overline{(u,v)} = \overline{(x,y)} \oplus \left(\overline{(z,w)} \oplus \overline{(u,v)}\right)$

Puesto que el producto puede ser mayor que 2 o menor que 1, será necesario ampliarlo o reducirlo convenientemente para que quede dentro de la octava $[1,2)$. Por ejemplo:

- tercera menor $\oplus$ sexta mayor $= \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{30}{15}\right) = \frac{2}{1} =$ octava;
- quinta $\oplus$ segunda mayor $\oplus$ sexta menor $= \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{8}\right) \cdot \left(\frac{8}{5}\right) = \frac{27}{10} > 2.$

Al reducir el intervalo $\frac{27}{10}$ se obtiene $\frac{27}{20}$.

6.2 Inversión de intervalos

En el ejemplo de la sección anterior vimos que

$$\text{tercera menor} \oplus \text{sexta mayor} = \text{octava}.$$

Como la octava es la unidad, tenemos que la tercera menor es la inversa de la sexta mayor y recíprocamente, esto es

$$(\text{tercera menor})^{-1} = \text{sexta mayor},$$

$$(\text{sexta mayor})^{-1} = \text{tercera menor}.$$

Pero en términos de números reales, la inversa de $\frac{6}{5}$ (tercera menor) es $\frac{5}{6}$; como este intervalo es menor que 1, lo multiplicamos por 2 para que quede dentro de la octava $[1,2)$ y obtenemos $2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ (sexta mayor). De manera que los intervalos musicales pueden invertirse, y la inversa se corresponde con la inversa multiplicativa de los números reales así:

$$r^{-1} = \frac{1}{r},$$

o en términos de clases de equivalencia,

$$\overline{(x,y)}^{-1} = \overline{(y,x)}.$$

6.3 Diferencia de intervalos

La diferencia de intervalos se efectúa por medio de la fórmula

$$r_1 \ominus r_2 = r_1 r_2^{-1},$$

o en términos de clases de equivalencia

$$\overline{(x,y)} \ominus \overline{(z,w)} = \overline{(x,y)} \oplus \overline{(w,z)},$$

lo que significa que para restar intervalos debemos efectuar el cociente de las fracciones que los definen. Por ejemplo, ¿qué intervalo es la diferencia quinta $\ominus$ cuarta? Como

$$(\text{cuarta})^{-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4},$$

tenemos que

$$\text{quinta} \ominus \text{cuarta} = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8} = \text{segunda mayor}$$

Por otro lado, como $\frac{3}{4} < 1$, al aumentarlo, tenemos que

$$(\text{cuarta})^{-1} = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \text{quinta}$$

Así,

$$\text{quinta} \ominus \text{cuarta} = \text{quinta} \oplus \text{quinta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} > 2$$

reduciendo el intervalo,

$$\text{quinta} \oplus \text{quinta} = 2^{-1} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{8} = \text{segunda mayor.}$$

7 Intervalos consonantes y disonantes

Intuitivamente, un intervalo es consonante o disonante si se siente agrado o desagrado al escucharlo. Esto es, por supuesto, muy subjetivo, puesto que "en gustos no hay disgustos". Sin embargo, desde tiempos antiguos se ha establecido que un intervalo es consonante si la fracción que lo define está conformada por dos números enteros pequeños y cercanos. El médico y físico alemán Hermann von Helmholtz (1821-1894) sostuvo que la disonancia ocurría cuando se producía un batido al sonar dos tonos de frecuencias cercanas. Sin detenernos a discutir estos puntos, aceptaremos la tabla mostrada en el cuadro 1 como el orden de consonancia de los intervalos más comunes.

Podríamos decir que el único intervalo con consonancia perfecta es la octava; todos los demás tienen cierto grado de disonancia que va en aumento a medida que aumentan los números que los definen o la separación entre ellos y los usaremos para construir nuestras escalas musicales.

8 Escalas musicales en la octava [1,2)

En general, una escala en la octava $[1, 2)$ es una partición del intervalo semiabierto de números reales [1,2), esto es, un conjunto de números

$$\wp = \{1 = x_1 < x_2 < ... < x_n < 2\}.$$

en donde cada x_i representa un intervalo musical, al que por supuesto le corresponde una nota musical bien definida. Es evidente que para que una escala sirva para hacer música, debe tener ciertas restricciones en su formación:

- Para hacer música con los instrumentos tradicionales, una escala no debería tener muchas notas.
- Los intervalos elegidos deberían ser lo más consonantes posibles.

La primera condición es más o menos obvia puesto que solo tenemos diez dedos en nuestras manos para tocar los instrumentos musicales; también cuentan las restricciones en cuanto al tamaño, forma y peso de dichos instrumentos.

La segunda restricción viene del hecho de que la música debería ser agradable al oído y por consiguiente sería bueno evitar las disonancias. Esto es bastante discutible puesto que lo que es disonante para unas personas no lo es tanto para otras y aunque hasta el siglo XVIII las disonancias se evitaban a todo costa, en el período romántico del siglo XIX y en el modernismo y folklorismo actual, se utilizan de forma recurrente. No entraremos a discutir estos asuntos en este artículo, pues simplemente queremos ir sólo a lo básico.

Aunque se tiene evidencia de que cinco mil años antes de Cristo algunas culturas usaban 5 notas musicales (escala pentatónica), lo más común fue el uso de 7 notas, que se aumentaron a 17 (notas con sostenidos y bemoles), para terminar en la época actual con 12 (por las enarmonías, y la escala equitemperada). Los nombres Do (Ut)-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si se los asignó el monje benedictino Guido D' Arezzo (990-1058) de las primeras letras del himno a San Juan Bautista:

UT queant laxis	Para que tus siervos
REsonare fibris	puedan exaltar
MIra gestorum	las maravillas de tus
FAmuli tuorum,	milagros, borra toda
SOLve polluti	mancha de culpa
LAbii reatum,	de sus labios impuros,
Sancte Ioannes.	Oh San Juan.

Potencias de $\frac{3}{2}$	$1\ \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^3, \left(\frac{3}{2}\right)^4, \left(\frac{3}{2}\right)^5$
Calculando las potencias	$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}$
Reduciendo los intervalos a la octava $[1,2)$	$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{64}, \frac{243}{128}$
Ordenando de menor a mayor	$1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}$

Cuadro 2: encadenamiento de quintas para la construcción de la escala pitagórica

Observación. En algunos países europeos las notas musicales se denotan con las letras del alfabeto así: C=Do, D=Re, E=Mi, F=Fa, G=Sol, A=La, B=Si.

Describiremos brevemente las escalas más utilizadas desde Pitágoras hasta nuestros días.

8.1 Escala pitagórica

Pitágoras (siglo VI a.c) consideraba que para que la escala fuera lo más consonante posible, se debería formar concatenando (sumando) intervalos de quinta, que es el intervalo más consonante después de la octava. Si hacemos esto 6 veces (potencias de 0 a 5), reducimos los intervalos multiplicando por $2^{-\left\lfloor \log_2\left(\frac{3}{2}\right)^n \right\rfloor}$ y ordenando de menor a mayor, obtenemos los intervalos mostrados en el cuadro 2. El intervalo de cuarta, $\dfrac{4}{3}$, no se puede obtener por un encadenamiento ascendente de quintas (la ecuación $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \dfrac{4}{3}$ no tiene solución en los enteros), pero sí se obtiene descendiendo una quinta, esto es, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1} = \dfrac{2}{3}$ y aumentando el intervalo, $2 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$. Obtenemos el siguiente encadenamiento de quintas:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{0}, \left(\frac{3}{2}\right)^{1}, \left(\frac{3}{2}\right)^{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^{3}, \left(\frac{3}{2}\right)^{4}, \left(\frac{3}{2}\right)^{5}.$$

En la Figura 7 se muestra la posición de las notas en el pentagrama de esta sucesión de quintas

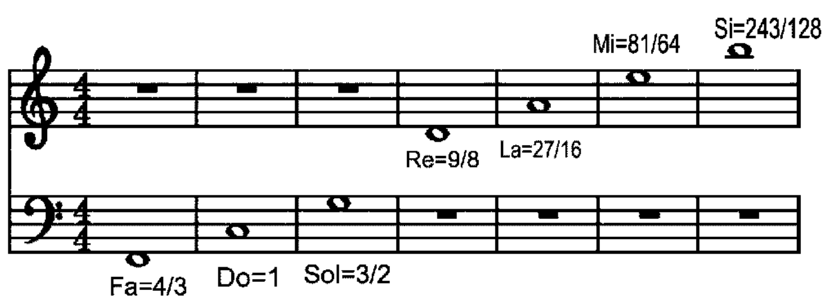

Figura 7: posición en el pentagrama de la escala pitagórica

$$1 \underbrace{\quad}_{\frac{9}{8}} \frac{9}{8} \underbrace{\quad}_{\frac{9}{8}} \frac{81}{64} \underbrace{\quad}_{\frac{256}{243}} \frac{4}{3} \underbrace{\quad}_{\frac{9}{8}} \frac{3}{2} \underbrace{\quad}_{\frac{9}{8}} \frac{27}{16} \underbrace{\quad}_{\frac{9}{8}} \frac{243}{128} \underbrace{\quad}_{\frac{256}{243}} 2$$

Cuadro 3: tonos y semitonos en la escala pitagórica

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
260.74	293.33	330	347.65	391.11	440	495	521.48

Cuadro 4: frecuencias de las notas en la escala pitagórica

Efectuando los cálculos y ordenando de menor a mayor, obtenemos los intervalos de la escala Pitagórica, llamada *escala diatónica.* Es interesante observar que la diferencia entre dos notas sucesivas de esta escala es o $\frac{9}{8}$ o $\frac{256}{243}$, como se observa en el cuadro 3, en el que también se ha colocado la nota Do (intervalo $\frac{2}{1}$) de la siguiente octava (quedan así 8 notas y de ahí el nombre de octava).

El intervalo de segunda mayor, $\frac{9}{8}$, se llama *tono* y el intervalo $\frac{256}{243}$ se llama *semitono.* La escala diatónica tiene entonces la disposición mostrada en la Figura 8

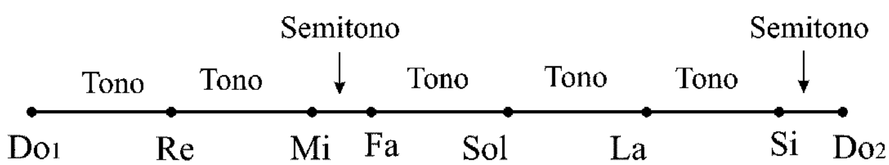

Figura 8: tonos y semitonos en la escala diatonica

Para encontrar la frecuencia de cada nota, se parte de una frecuencia básica que tradicionalmente es 440 Hz asignada a la nota La y se multiplica o divide por los respectivos intervalos. Por ejemplo, para encontrar la frecuencia de la nota Si, vemos que está un tono arriba de la nota La, por lo tanto multiplicamos 440 por $\frac{9}{8}$ lo que da 495Hz; para obtener la frecuencia de la nota Re, vemos que esta tres tonos y medio por debajo de La, así que dividimos 440 por $\left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \frac{256}{243}$ lo que da 293.33. En el cuadro 4 se ven las notas con sus respectivas frecuencias.

Esta escala tiene la característica de que la suma de dos semitonos no da un tono:

$$\text{semitono} \oplus \text{semitono} = \frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243} = \frac{65536}{59049} \approx 1{,}109$$

mientras que un tono $= \frac{9}{8} = 1{,}125 > 1{,}109$. La diferencia es

$$\text{tono} \ominus (\text{semitono} \oplus \text{semitono}) = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243}} = \frac{531{,}441}{524288} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1{,}013$$

llamada *comma pitagórica.* Esta diferencia es la causante de las dificultades que se encuentran cuando se quiere cambiar de tonalidad en una obra musical[5].

La escala diatónica se extiende a 17 notas subiendo un semitono en los 5 tonos, obteniendo los sostenidos, y bajando un semitono en los 5 tonos, obteniendo los bemoles. Esto se puede hacer con la sucesión de quintas

$$\mathcal{SQ} = \left\{ \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z},\ -6 \leq n \leq 10 \right\}.$$

Si reducimos y aumentamos dichos intervalos para que queden en la octava $[1, 2)$, obtenemos la escala

$$\mathcal{EP} = \left\{ 2^{-\left\lfloor \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \right\rfloor} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z},\ -6 \leq n \leq 10 \right\}.$$

Esto se muestra tradicionalmente en forma de círculo, denominado *círculo de quintas* como se observa en la Figura 9.

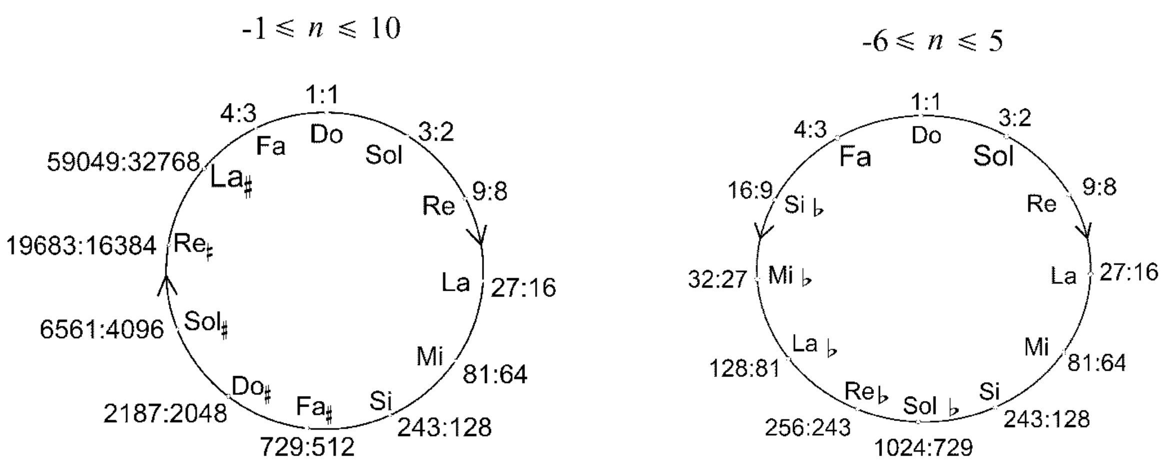

Figura 9: círculo de quintas de la escala pitagórica

Observación. La octava (aumentada) Do-Do puede pensarse como el intervalo cerrado $[1, 2]$ en donde el punto 1 es el mismo punto 2, por la relación de equivalencia definida en la sección 4. Este conjunto, desde el punto de vista de la topología, es efectivamente el círculo S^1 como se muestra en el diagrama siguiente, en donde la función $\overline{f}$ es un homeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} {[1,2]} \arrow[r, "f"] & S^1 \\ t \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "p"'] & e^{2\pi i t} \\ {[1,2]/\sim} \ni \overline{t} \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \overline{f} \circ p = f \end{tikzcd}$$

Esta es la razón por la cual se colocan las notas de las escalas en un círculo (la octava).

8.2 Escala justa

Aunque la escala pitagórica tiene quintas y cuartas justas, la tercera, $\frac{81}{64} = 1{,}2627$ es demasiado grande comparada con la justa $\frac{5}{4} = 1{,}25$. Esto molestaba mucho a los músicos renacentistas quienes consideraban el intervalo de tercera justa como la base de la armonía musical y por lo tanto esta tercera pitagórica sonaba muy disonante.

El religioso franciscano Gioseffo Zarlino (1517-1590), músico y teórico italiano, abogó por una escala con terceras justas, construida restando una *comma sintónica*, diferencia entre la tercera pitagórica y la tercera justa,

$$\text{Comma sintónica} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{5}{4}} = \frac{81}{80}$$

a algunas quintas de la sucesión de quintas $\mathcal{SQ}$. Esto equivale a reemplazar en dicha sucesión algunas quintas por la *quinta sintónica*, quinta obtenida restando la comma sintónica a la quinta justa

$$\text{Quinta sintónica} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{81}{80}} = \frac{40}{27}$$

para obtener la sucesión de intervalos $\{b_n\}$ donde [2],[3]

$$b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-a_n} \left(\frac{40}{27}\right)^{a_n}$$

y

$$a_n = \left\lfloor \frac{n+1}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{7} \right\rfloor$$

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
264	297	330	352	396		495	528

Cuadro 5: frecuencias de las notas de la escala justa

Si reducimos y aumentamos dichos intervalos a la octava $[1, 2)$ obtenemos la escala justa dada por el conjunto

$$\mathcal{EJ} = \left\{ 2^{-\lfloor \log_2 b_n \rfloor} b_n \,|\, n \in \mathbb{Z},\ -6 \leq n \leq 10 \right\}$$

En los círculos de la Figura 10 vemos sus valores.

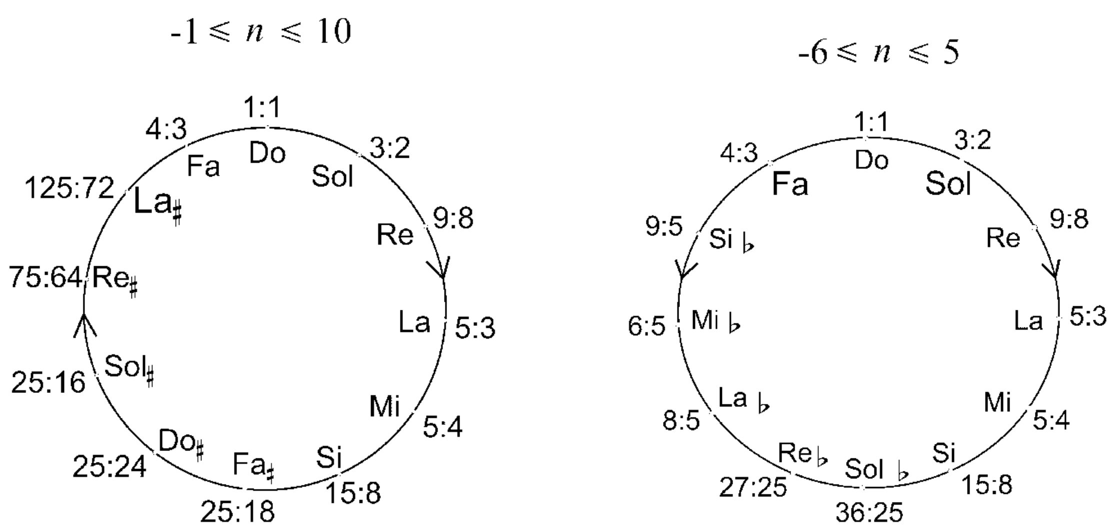

Figura 10: círculo de quintas de la escala justa

En el cuadro 5 se muestran las 8 notas (con el Do de la siguinte octava) con sus frecuencias partiendo del La de 440Hz. Observe que en esta escala las frecuencias son números enteros, comparados con los decimales de la escala pitagórica.

8.3 Escala equitemperada

Si en la escala pitagórica $\mathcal{EP}$ tomamos n tal que $0 \leq n \leq 12$, obtenemos el círculo que se muestra en la Figura 11

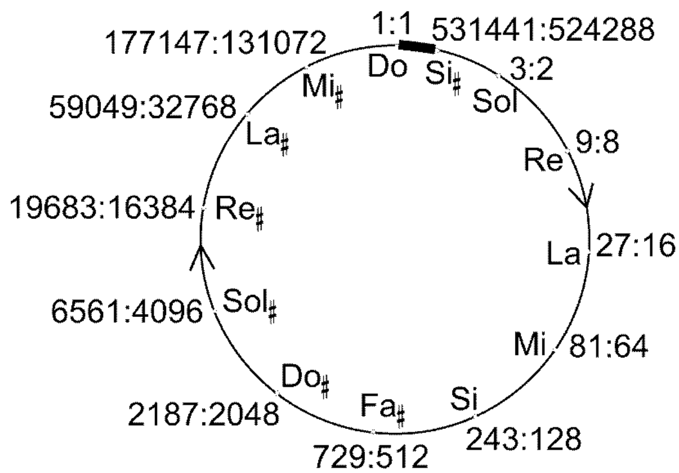

Figura 11: comma pitagórica en el círculo de quintas

Como se observa, Si#≠Do y difieren por una comma pitagórica. Esto significa que el círculo no se cierra ni ascendiendo (ni tampoco descendiendo) por quintas, razón por la cual algunas personas llaman a esto *espiral de quintas* en lugar de círculo de quintas. Tenemos entonces que concatenando quintas nunca podremos conseguir una octava. Esta afirmación es clara porque al intentar resolver la ecuación $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$, obtenemos

$$\frac{m}{n} = \log_2 \frac{3}{2}$$

lo que ciertamente es un absurdo pues $\frac{m}{n}$ es un número racional mientras que $\log_2 \frac{3}{2}$ es irracional.

Se puede cerrar la espiral de quintas de muchas maneras, lo que los músicos llaman *temperar la escala*. La forma más simple de hacerlo sería acortar la última quinta en una comma pitagórica para que Si#=Do. Tendríamos entonces 11 quintas perfectas y una muy mala. Los antiguos llamaban a esta quinta la *quinta del lobo* pues al pasar por allí se escucha un batido. Esta quinta está dada por el intervalo

$$\text{Quinta del lobo} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3^{12}}{2^{19}}} = \frac{2^{18}}{3^{11}} \approx 1{,}479810 \ll 1{,}5$$

Tal vez la forma más común y más útil de temperar la escala, es dividiendo la comma pitagórica en 12 partes iguales y restársela a cada quinta. De esta manera se cierra el círculo pero por supuesto, se pierden todas las consonancias puesto que todas las quintas quedan ligeramente desafinadas (un poco desviadas de la quinta perfecta). Tal escala se denomina *equitemperada*. Para dividir la comma pitagórica en 12 partes iguales, resolvemos la ecuación

$$x^{12} = \frac{3^{12}}{2^{19}},$$

lo que resulta en

$$x = \frac{3}{2^{\frac{19}{12}}}.$$

Si a la quinta $\frac{3}{2}$ le restamos x, obtenemos

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2^{\frac{19}{12}}}} = 2^{\frac{7}{12}}.$$

De manera que en la escala equitemperada, el intervalo de quinta es $2^{\frac{7}{12}} \approx 1{,}498307...$ ligeramente desviado de la quinta perfecta $\frac{3}{2} = 1{,}5$. Para encontrar todos los intervalos de esta escala tomamos las potencias de su quinta

$$\mathcal{QT} = \left\{ \left(2^{\frac{7}{12}}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 12 \right\}.$$

Para reducir los intervalos a la octava $[1, 2)$, realizamos el mismo procedimiento de la sección 4 y encontramos que cada intervalo debe multiplicarse por $2^{-\left\lfloor \frac{7n}{12} \right\rfloor}$. Tenemos así las 12 notas dadas por el conjunto

$$\mathcal{ET} = \left\{ 2^{-\left\lfloor \frac{7n}{12} \right\rfloor} \cdot 2^{\frac{7n}{12}} \middle| n \in \mathbb{Z},\ 1 \leq n \leq 12 \right\},$$

como se muestra en el círculo de la Figura 12.

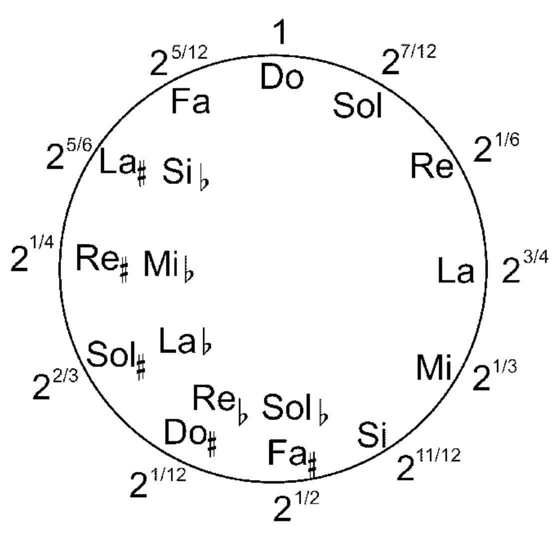

Figura 12: círculo de quintas de la escala equitemperada

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
1:1	$2^{\frac{2}{12}}:1$	$2^{\frac{4}{12}}:1$	$2^{\frac{5}{12}}:1$	$2^{\frac{7}{12}}:1$	$2^{\frac{9}{12}}:1$	$2^{\frac{11}{12}}:1$	2:1
261.63	293.66	329.63	349.23	391.99	440	493.88	523.25

Cuadro 6: frecuencias de las notas de la escala equitemperada

Tenemos entonces 12 notas con intervalos del mismo tamaño de valor $2^{\frac{1}{12}}$ (semitono). Son sólo 12 notas pues la nota 13, Si# es el mismo Do de la siguiente octava ($2^{\frac{12}{12}} = 2$), esto es, la espiral se cierra y así, sostenidos y bemoles coinciden. Las frecuencias de las notas son, por supuesto, números irracionales como se observa en el cuadro 6.

9 Conclusión

Hemos construido matemáticamente las 3 escalas más comunes en la teoría musical. Variando ligeramente estos procedimientos de construcción, podemos obtener un gran número de escalas y temperamentos [1], incluso con un número infinito de sonidos con sólo extender los conjuntos que definen dichas escalas a todo $n \in \mathbb{Z}$. Cualquier temperamento, esto es, cualquier mecanismo que se utilice para cerrar el círculo, producirá siempre intervalos irracionales, algo que es bastante lógico dado el carácter irracional del número π. Actualmente la escala más utilizada es la equitemperada, por la facilidad al modular a otras tonalidades, aunque en los instrumentos de cuerda sin trastes (violines, violas y violoncelos), es posible tocar y modular con cualquier otra escala pues la longitud de las cuerdas está determinada por los dedos del intérprete del instrumento y no por la construcción del instrumento mismo, como sucede con los pianos, flautas, trompas etc.

Es de esperar que el lector se haya convencido de que las escalas musicales no son otra cosa que números y relaciones entre números, por lo que la música en general también lo es y por lo tanto se hace clara la frase “la música es matemática”, frase muchas veces pronunciada, pero pocas veces explicada.

Referencias

[1] D. Benson, A Mathematical Offering, `http://www.abdn.ac.uk/~mth192/html/maths-music.html`.

[2] V. Liern, Algoritmos matemáticos y afinación musical, Educación Mat. 6 (1994) 45–55.

[3] V. Liern, Fuzzy tuning systems: the mathematics of musicians, Fuzzy sets and systems 150 (205) 35-52

[4] Guerino Mazzola, Mathematical Music Theory—Status Quo 2000 www.encyclospace.org

[5] J. Zamacois, Teoría de la Música. Editorial Labor. Barcelona. 1973

[6] Karel Hrbacek; Thomas Jech, Introduction to Set Theory. Third Edition. Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1999.

Dirección del autor

Diego L. Hoyos H. — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali-Colombia

e-mail: `diego@univalle.edu.co`